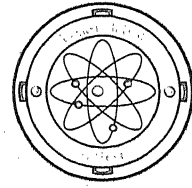
ISSN : 0505-5806

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

The Research Journal of
the Hindi Science Academy

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika

Vol 46 July 2003 No. 3

विज्ञान परिषद् प्रयाग

महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-211002

कौंसिल ऑफ साइंस एण्ड टेक्नालॉजी, उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल ऑफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च, नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित

विषय सूची

Vol.46 July 2003 No.3

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 3, July 2003

कृषिभूमि गुणवत्ता एवं भूमि उपयोग/भूमि आच्छादन सम्बन्ध का सुदूर संवेदन एवं भौगोलिक सूचना प्रणाली आधारित विश्लेषण

एस० के० त्रिपाठी तथा डी० के० त्रिपाठी

भूगोल विभाग, कमला नेहरू भौतिक एवं सामाजिक विज्ञान संस्थान, सुलतानपुर (उ०प्र०)

[प्राप्त - दिसम्बर 1, 2002]

सारांश

प्रस्तुत अध्ययन में मिरजापुर जनपद (24°34'उ0 से 25°16' उ0 एवं 82°05' पू0 से 83°11' पू0) में कृषि भूमि गुणवत्ता (ALQ) तथा भूमि उपयोग/भूमि आच्छादन (LU/LC) सम्बन्ध के विश्लेषण का प्रयास किया गया है। इस हेतु सुदूर संवेदन (IRS-1B, LISS-1, FCC (B-2,3,एवं 4) मापक 1: 250000) एवं क्षेत्रीय अध्ययन (क्षेत्र सत्यापन हेतु) से प्राप्त आंकड़ों का प्रयोग किया गया है। ALQ-LU/LC सम्बन्ध के अध्ययन हेतु जनित सूचनाओं को GIC (ARC-View) तकनीक से विश्लेषित किया गया है। ALQ-LU/LC सम्बन्ध अध्ययन सूक्ष्मस्तरीय पारिस्थितिक-मित्र भूमि उपयोग/कृषि विकास नियोजन एवं प्रबन्धन में महत्वपूर्ण सहयोग दे सकता है।

Abstract

Agricultral land quality and land use / land cover relationship analysis based on Remote Sensing and Geographical Information System : A case study. *By* S.K. Tripathi and D.K. Tripathi, P.G. Department of Geography, Kamla Nehru Institute of Physical & Social Sciences, Sultanpur (U.P.)

In the present study an attempt has been made to analyse the Agricultural Land Quality (ALQ) and Land

Use/ Land Cover (LU/LC) relationship in Mirzapur District ($24^0$34' N to $25^0$16' N and $82^0$05' E to $83^0$11' E) using Remotely sensed (IRS-1B, LISS-1, FCC (B-2,3 and 4) Scale 1 : 250000) and field survey (Ground Verification) data. The generated information has been analysed in GIS (Arc-View) to study the ALQ-LU/LC relationship. The study of ALQ-LU/LC relationship will be of immense help in the eco-friendly land use/agricultural development planning and management at Micro level.

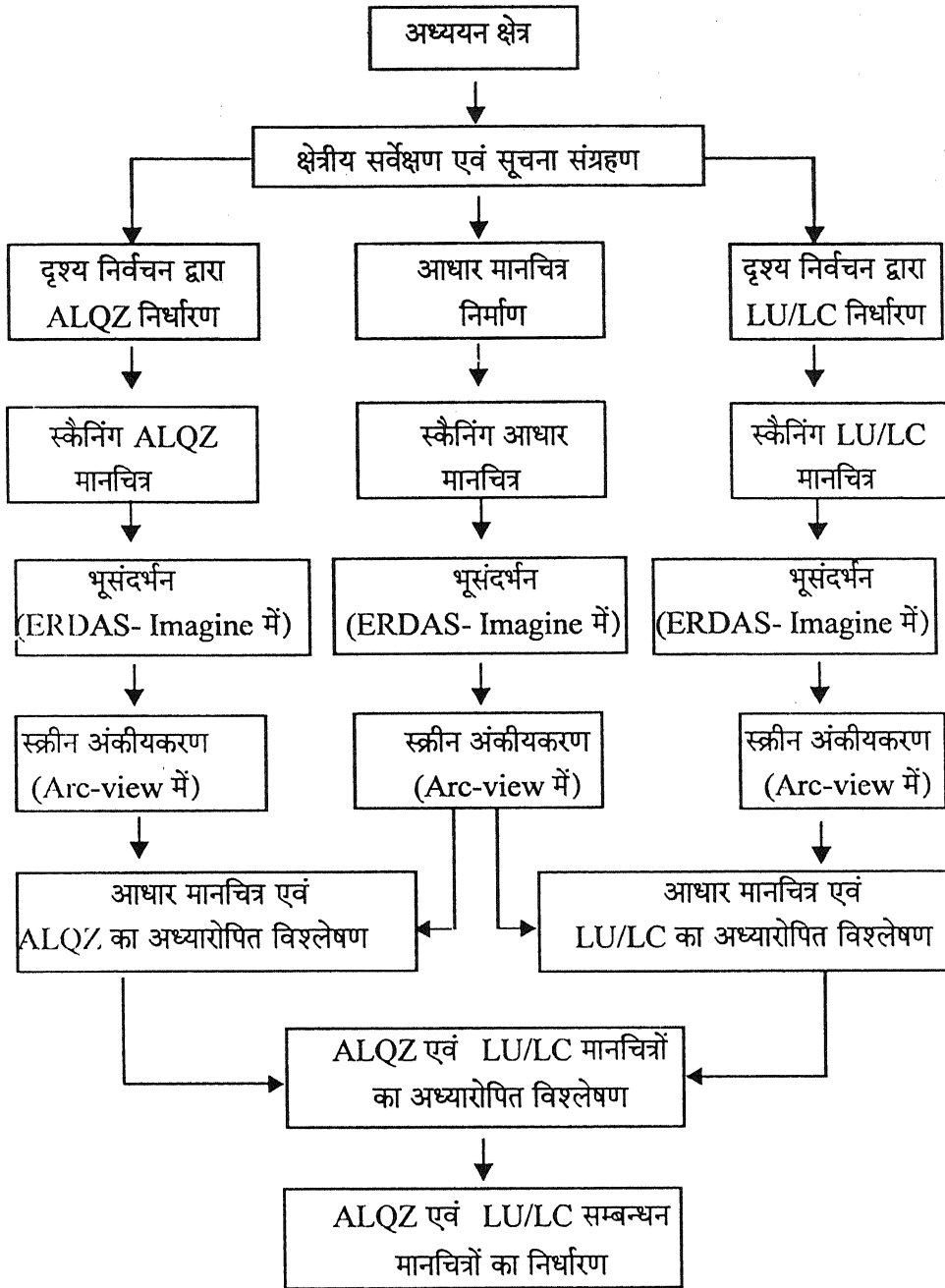
भूमि उपयोग/भूमि आच्छादन (Land use/Land cover) स्थानिक अध्ययन (Spatial Study) का एक प्रमुख पहलू है। भूमि पर अन्य प्राकृतिक तत्वों के अन्तर्सम्बन्धों से जो भूदृश्य (Land Scape) उभरता है, वह भूमि आच्छादन के रूप में माना जाता है। इसी भूमि आच्छादन पर धीरे-धीरे मानवीय तत्वों के संयोग से जो भूदृश्य उभरता है, भूमि उपयोग कहलाता है। भूमि उपयोग/भूमि आच्छादन (LU/LC) के परिर्वतन में कृषि भूमि गुणवत्ता (Agricultural Land Quality -ALQ) की महत्वपूर्ण भूमिका होती है। मानवीय आवश्यकताओं के अनुरूप तकनीकी कुशलता में प्रगति के साथ-साथ LC का स्थान LU लेता जाता है। उत्तम ALQ से निम्न ALQ तक की भूमि क्रमशः कालावधि के साथ-साथ आच्छादन से उपयोग में परिवर्तित हो जाती है।

उक्त संदर्भ में ALQ तथा LU/LC के सम्बन्ध का विश्लेषण कृषि नियोजन एवं प्रबन्धन में महत्वपूर्ण भूमिका अदा कर सकता है। इस क्षेत्र में विभिन्न विद्वानों ने उल्लेखनीय कार्य किया है।[1,4,5] वास्तव में कृषि नियोजन के परिणाम में आशा के अनुरूप सफलता न प्राप्त होने का एक महत्वपूर्ण कारण स्थानिक उपागम (Spatial Approaches) को अनदेखा करना भी रहा है (त्रिपाठी तथा त्रिपाठी [3])। प्रस्तुत शोधपत्र में उक्त विश्लेषण हेतु मिरजापुर जनपद ($24^0$34'उ0 से $25^0$16' उ0 एवं $82^0$05' पू0 से $83^0$11' पू0) को विशेष अध्ययन हेतु चयनित किया गया है (मानचित्र सं0 - 1)।

प्रयोगात्मक

आंकड़ा आधार एवं विधितंत्र

प्रस्तुत शोधपत्र में निम्नलिखित स्थानिक (Spatial) एवं अस्थानिक (Nonspatial) आंकड़ों का प्रयोग किया गया है।

i- IRS-1B, LISS-1, FCC(B-2,3 एवं 4), मापक 1: 250000।

चित्र संख्या - 1 विधितंत्र प्रवाह चार्ट

सारणी - 1

मिरजापुर जनपद में कृषिभूमि गुणवत्ता एवं भूमि उपयोग/भूमि आच्छादन - 1996
(IRS-1B, LISS-1, FCC B-2, 3 एवं 4 के आँकड़ों एवं GIS विश्लेषण के आधार पर)

ALQZ	जनपद	छानवें	कोन	मझवा	सिटी	पहाड़ी	लालगंज	हलिया	मड़िहान	राजगढ़	सिखर	नारायनपुर	जमालपुर
सर्वोत्तम (V1)	11.49 (23779)	11.43	100.0	32.43	19.93	4.63	-	-	2.70	2.12	89.17	27.93	41.43
अतिउत्तम (V2)	16.98 (35141)	64.73	-	67.57	24.59	7.79	11.79	8.74	-	3.65	10.83	53.39	39.98
उत्तम (G)	8.52 (17633)	0.80	-	-	4.33	24.72	27.58	11.07	1.03	5.50	-	7.16	-
मध्यम (M)	30.98 (64115)	9.63	-	-	35.40	24.42	31.38	52.37	43.71	31.67	-	-	9.18
निम्न (P)	13.51 (27960)	1.15	-	-	4.42	12.41	5.66	6.46	32.35	34.86	-	5.74	6.92
अतिनिम्न (VP)	18.53 (38249)	12.27	-	-	11.32	26.04	23.59	21.37	29.21	22.20	-	5.78	2.49

LU/LC													
शुद्ध बोया गया क्षेत्र (NSA)	89487.3 (43.24)	79.32	100.0	98.03	62.40	46.01	56.80	32.67	6.67	11.60	100.00	87.90	80.60
वनभूमि (FL)													
सघन (DFL)	5.47 (11320.4)	4.21	-	-	5.03	-	-	7.02	-	15.19	-	-	10.64
विवृति (OFL)	12.74 (26366.1)	-	-	-	2.84	22.75	10.50	24.89	28.29	3.25	-	-	-
कृषि योग्य बंजर भूमि (CWL)	12.41 (25683.1)	-	-	-	0.28	12.31	3.63	8.34	24.33	31.52	-	1.94	2.98
कृषि के लिए अनुलब्ध भूमि (LNAC)													
अधिवास (ST)	0.80 (1655.6)	0.04	-	1.97	10.30	-	0.73	0.19	0.20	-	-	1.14	-
जल क्षेत्र (WB)	1.35 (2793.9)	-	-	-	-	0.11	0.59	1.50	2.01	3.43	-	-	1.99
कृषि अयोग्य भूमि (UCL)	23.99 (49648.5)	16.44	-	-	19.15	18.82	27.75	25.39	38.50	35.02	-	9.01	3.79

नोट :- कोष्ठक में दिये गये आँकड़े हे० में है ।

MIRZAPUR DISTRICT
LOCATION MAP
MIRZAPUR DISTRICT
STUDY AREA
200 0 200 400K M
82°15' E
82°30' E
82°45' E
83°00' E
25° 15' N
25° 00' N
24° 45' N
FROM ALLAHABAD
TO VARANASI
TO MUGALSARAI
KONE
MAJHAWA
CHHANWAY
SURSI
JAMALPUR
NARAYANPUR
SIKHAR
BHATWARA
CITY
BARKACHHA KALA
PAHARI
LALGANJ
KHAMAWA JAMTI
RAJGARH
GARHWA
MARIHAN
HALIYA
District Head Quarter
Block Head Quarter
Railway Line
Road
Block Boundary
District Boundary
State Boundary
10 0 10 20 KM

मानचित्र संख्या - 1

ii- सर्वे ऑफ इन्डिया (SOI) द्वारा प्रकाशित स्थलाकृतिक मानचित्र (Topographical Map) संख्या - 63 K, L, O एवं P, मापक 1: 250000।

iii - नेशनल एटलस ऐण्ड मैपिंग आर्गनाइजेशन (NATMO) द्वारा प्रकाशित जनपद नियोजन मानचित्र, मिरजापुर जनपद मापक 1 : 250000 ।

iv- भौम जल सर्वेक्षण विभाग, उ0 प्र0 सरकार द्वारा एकत्रित भौम जल सम्बन्धी आंकड़े।

v- सांख्यकीय पत्रिका, मिरजापुर जनपद - 1997।

प्रस्तुत अध्ययन में निम्नलिखित विधितंत्रात्मक चरण अपनाये गये । (चित्र संख्या-1)

प्रथम चरण : परिकल्पना स्थापन एवं अध्ययन उद्देश्य निर्धारण, क्षेत्रीय पर्यावरण सम्बन्धी गुणात्मक सूचनाओं का संग्रह एवं अध्ययन।

द्वितीय चरण : छविचित्र का दृश्य निर्वचन एवं ALQZ, LU/LC वर्ग एवं आधार मानचित्र का निर्माण।

तृतीय चरण : भौगोलिक सूचना प्रणाली आधारित विश्लेषण एवं परिणाम सम्पादन।

परिणाम तथा विवेचना

कृषिभूमि गुणवत्ता का स्थानिक प्रतिरूप

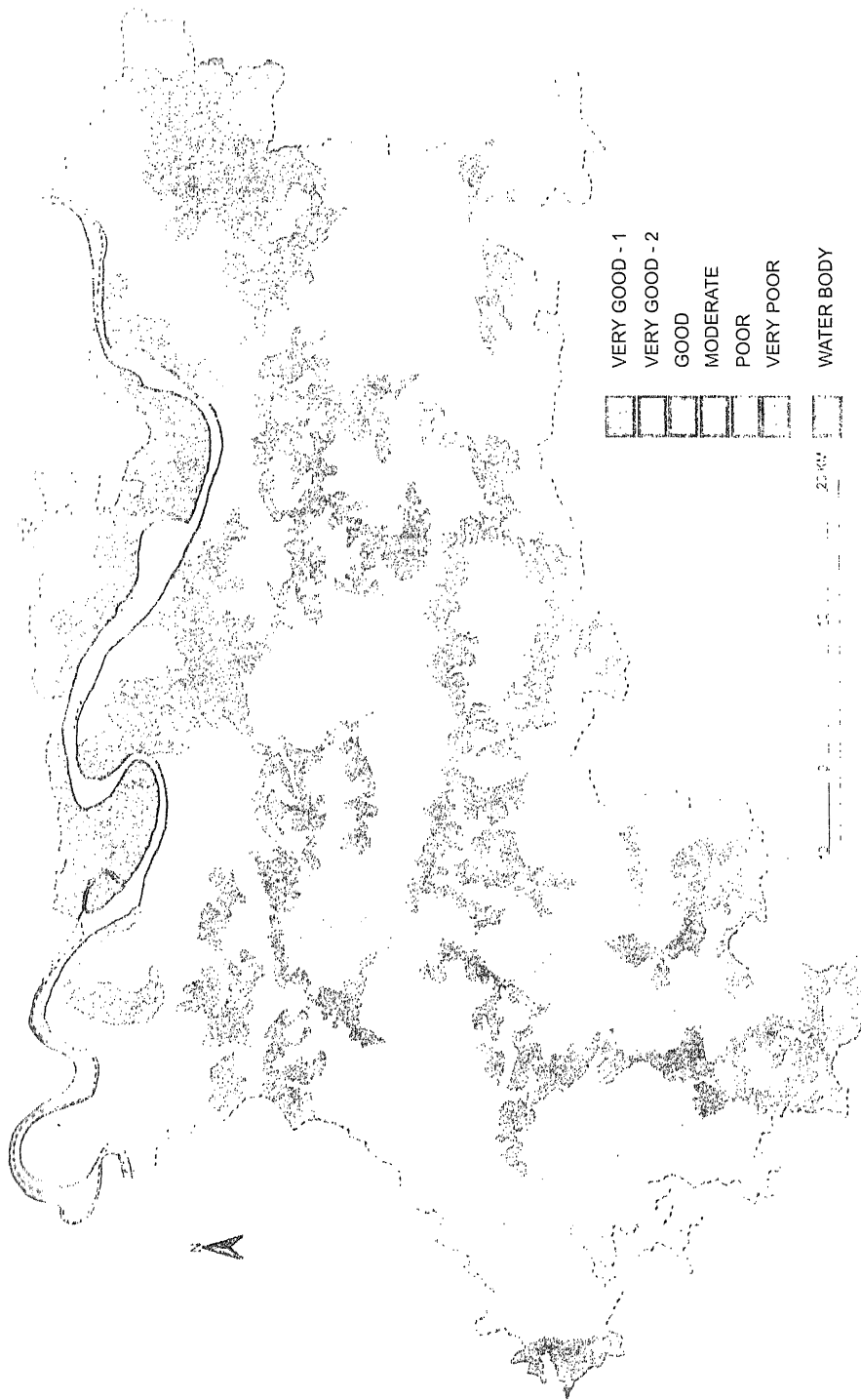
मिरजापुर जनपद के विभिन्न क्षेत्रों में ALQ में पर्याप्त स्थानिक भिन्नता (Spatial Variations) पायी जाती है। यह भिन्नता विभिन्न प्रकार के भौतिक-सांस्कृतिक तथा सामाजिक-आर्थिक तत्वों का प्रतिफल है। भौतिक कारक यथा -भ्वाकृति (Geomorphic Features), अपवाह तन्त्र (Drainage System), रुक्ष धरातल (Ruggedness), मृदा (Soil), वनस्पति (Vegetation) आदि तथा सामाजिक-आर्थिक कारक यथा - अधिवास (Settlement), कृषि अवसंरचनाएँ (Agricultural Infrastructures), यातायात व्यवस्था (Transport),वानिकी (Forestry), जलप्लावन एवं वाहीजल (Waterlogging and runoff), व्यतिक्रमण आदि, क्रमशः कृषि भूमि की प्रकृति के निर्धारण एवं कृषि भूमि गुणवत्ता में वृद्धि एवं ह्रास की परिस्थितियों के निर्माण के लिए उत्तरदायी होते हैं। जनपद में ALQZs का निर्धारण सुदूर संवेदन एवं भौगोलिक सूचना तंत्र (GIS) तकनीक के माध्यम से 6 कोटियों में किया गया है - i सर्वोत्तम (V1) ii अतिउत्तम V2 iii उत्तम (G) iv मध्यम (M) v निम्न (L) vi अति निम्न (VL) (त्रिपाठी एवं त्रिपाठी[3])। (सारणी संख्या - 1 मानचित्र संख्या - 2)।

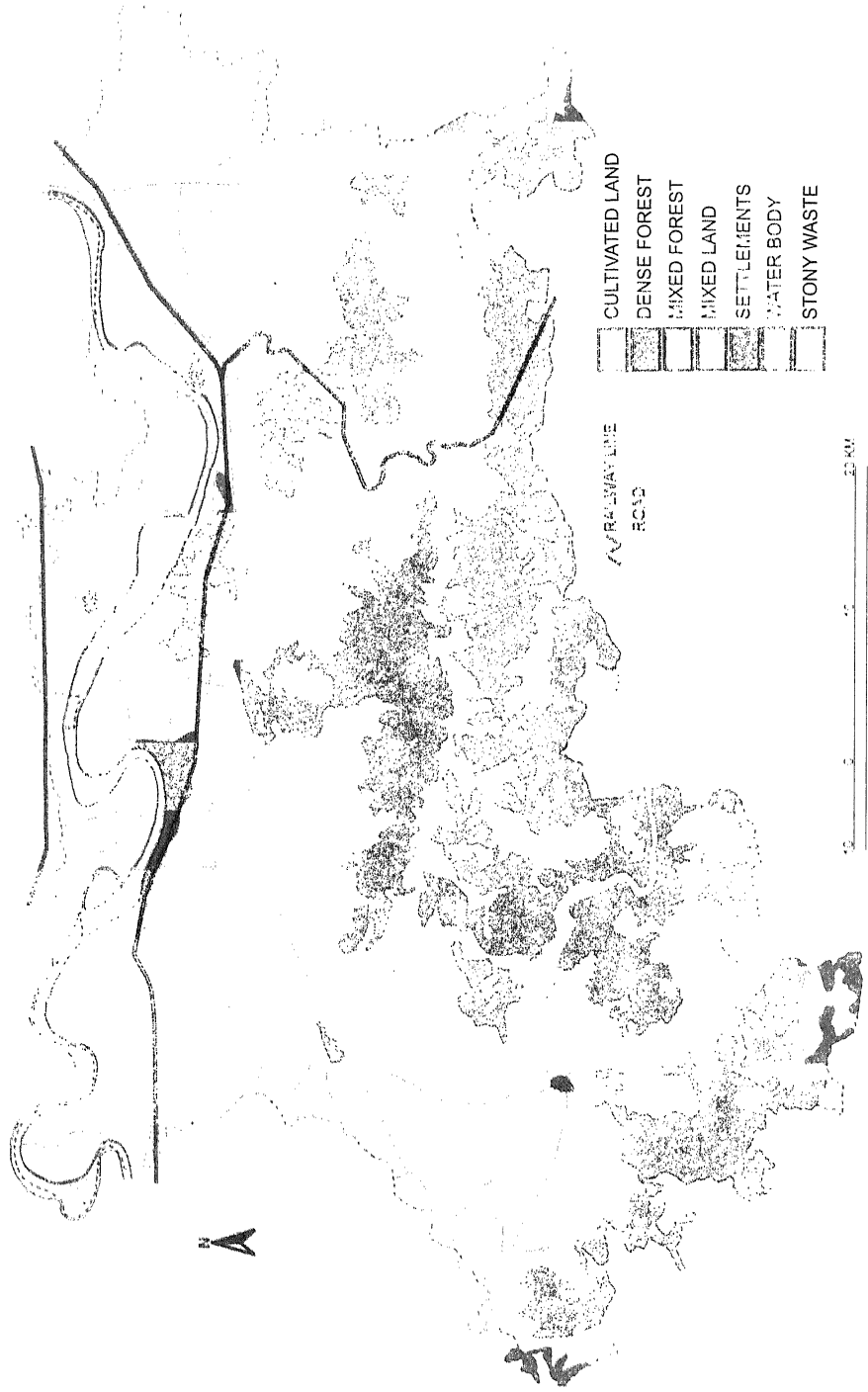
भूमि उपयोग/भूमि आच्छादन का स्थानिक प्रतिरूप

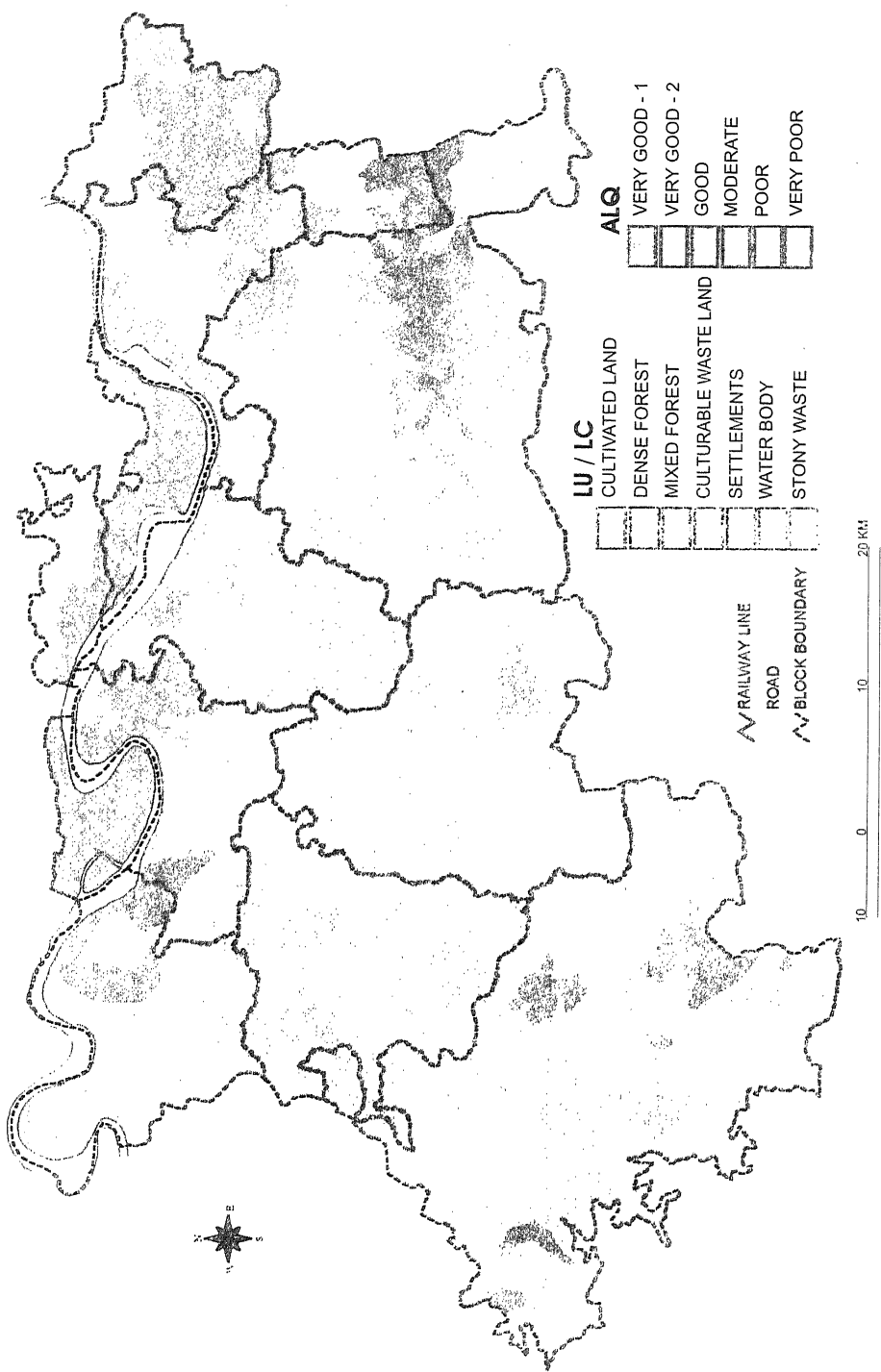
भूमि उपयोग एवं भूमि आच्छादन किसी प्रदेश के भूमि मूल्यांकन एवं प्रबंधन (Land Evaluation and management) का एक आधारभूत पहलू है। LU/LC वर्ग निर्धारण एवं मानचित्र में सुदूर संवेदन तकनीक (Remote Sensing Technique) एक शक्तिशाली उपादान सिद्ध हो रही है। विश्वस्तरीय अंतर्विषयक (Inter disciplinary) विद्वानों द्वारा विश्व के भिन्न-भिन्न क्षेत्रों के लिये LU/LC वर्गीकरण हेतु विविध रूपरेखा प्रदान की गयी है (त्रिपाठी [2])। मिरजापुर जनपद के LU/LC को निम्न कोटियों में वर्गीकृत किया गया है। i वन भूमि - a. सघन b. विवृत ii. कृषि अयोग्य भूमि iii कृषि के लिये अनुपलब्ध भूमि - a. जल क्षेत्र b. अधिवास iv. कृषि योग्य बन्जर भूमि v. कृषित भूमि। इन कोटियों का निर्धारण सुदूर संवेदन तकनीक से किया गया है। तत्पश्चात् कम्प्यूटर आधारित भौगोलिक सूचना तंत्र प्रविधि (Geographical Information System - GIS) का प्रयोग स्थानिक विश्लेषण (Spatial Analysis) हेतु किया गया है,जिसका परिणाम सारणी-1एवं मानचित्र 3 से स्पष्ट है।

कृषि भूमि गुणवत्ता एवं भूमि उपयोग/भूमि आच्छादन सम्बन्ध

सुदूर संवेदन तथा भौगोलिक सूचना तंत्र तकनीकी आधारित स्थानिक विश्लेषण जनपद में ALQZs एवं LU/LC के गहरे सम्बन्धों को प्रदर्शित करता है (सारणी -2)। उत्तम से सर्वोत्तम गुणवत्ता वाली भूमि पर प्रधानतया कृषि भूमि विस्तृत है। उत्तम एवं अति उत्तम प्रकार की गुणवत्ता वाली भूमि के कुल क्षेत्रफल के क्रमशः 36.77 तथा 24.78 प्रतिशत क्षेत्र पर कृषि भूमि का विस्तार है, जबकि मध्यम, निम्न तथा अति निम्न ALQ पर कृषिभूमि का विस्तार क्रमशः 15.01,1.99 तथा 7.29 प्रतिशत ही है। वहीं ALQZ की इन्हीं कोटियों पर अधिवास (क्रमशः 18.41 एवं 9.52 प्रतिशत) के अतिरिक्त अन्य उपयोगों का विस्तार लगभग नगण्य है। वन भूमियों (Forest Land) का आच्छादन मुख्यतः मध्यम (सघन 77.51, मिश्रित 53.72 प्रतिशत) से निम्न (सघन 6.56, मिश्रित 33.42प्रतिशत) अथवा अति निम्न (सघन 13.28 तथा मिश्रित 6.74 प्रतिशत) ALQZ पर पाया जाता है। सर्वाधिक अधिवास के अन्तर्गत भूमि मध्यम गुणवत्ता वाली भूमि (56.51प्रतिशत) में दृष्टव्य है। इसके बाद क्रमशः सर्वोत्तम (18.41 प्रतिशत), उत्तम (10.79 प्रतिशत), अति उत्तम (9.52 प्रतिशत) ALQZs में उल्लेखित भूमि क्षेत्र अधिवास के अन्तर्गत आती है। कृषि अयोग्य भूमि या चट्टानी बंजर भूमि का सर्वाधिक विस्तार अति निम्न (41.56 प्रतिशत), मध्यम (29.16 प्रतिशत) तथा निम्न (22.51) ALQZ पर पाया जाता है (सारणी 2 एवं

MIRZAPUR DISTRICT
AGRICULTURAL LAND QUALITY
(BASED ON IRS 1 B, LISS 1, FCC 2, 3, 4)
VERY GOOD - 1
VERY GOOD - 2
GOOD
MODERATE
POOR
VERY POOR
WATER BODY

मानचित्र संख्या – 2

MIRZAPUR DISTRICT
LAND USE / LAND COVER MAP
(BASED ON IRS 1 B, LISS 1, FCC 2, 3, 4)
N
RAILWAY LINE
ROAD
CULTIVATED LAND
DENSE FOREST
MIXED FOREST
MIXED LAND
SETTLEMENTS
WATER BODY
STONY WASTE

मानचित्र संख्या – 3

MIRZAPUR DISTRICT
AGRICULTURAL LAND QUALITY AND LAND USE/LAND COVER RELATIONSHIP
(BASED ON IRS 1 B, LISS 1, FCC 2, 3, 4)
N
E
S
LU / LC
CULTIVATED LAND
DENSE FOREST
MIXED FOREST
CULTURABLE WASTE LAND
SETTLEMENTS
WATER BODY
STONY WASTE
ALQ
VERY GOOD - 1
VERY GOOD - 2
GOOD
MODERATE
POOR
VERY POOR
RAILWAY LINE
ROAD
BLOCK BOUNDARY
10 0 10 20 KM

मानचित्र संख्या – 4

सारणी - 2

मिरजापुर जनपद में कृषि भूमि गुणवत्ता एवं भूमि उपयोग/भूमि आच्छादन सम्बन्ध - 1996

(IRS-1B LISS 1 FCC B-2, 3, 4 के आंकड़ो एवं GIS विश्लेषण पर आधारित)

% में

कृषि भूमि गुणवत्ता ALQ	शुद्ध बोया गया क्षेत्र	वन क्षेत्र		कृषि योग्य बंजर भूमि	कृषि के लिए अनुपलब्ध भूमि		कृषि अयोग्य भूमि
		सघन	विवृत		अधिवास	जल क्षेत्र	
सर्वोत्तम V1	24.78	0.00	0.04	1.42	18.41	0.00	1.86
अतिउत्तम V2	36.77	0.04	3.17	2.94	9.52	0.00	1.88
उत्तम G	14.16	2.61	2.91	7.55	10.79	10.84	3.04
मध्यम M	15.01	77.51	53.72	27.79	56.51	64.49	29.16
निम्न P	1.99	6.56	33.42	34.22	0.00	18.69	22.51
अतिनिम्न VP	7.29	13.28	6.74	26.09	4.76	5.98	41.56

मानचित्र - 4)।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय इस शोधपत्र की तैयारी में डा॰ शिव पूजन मिश्र (रीडर, भूगोल विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय) से प्राप्त निर्देशन के लिए आभारी हैं ।

निर्देश

1. करेल, आर. एल. तथा अन्य : Naturtal resources Management : A new perespective, NNRMS, Bangalore, 1992.

2. त्रिपाठी, एस. के. : पी एच॰डी शोध प्रबन्ध, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी, 2001

3. त्रिपाठी, एस. के. तथा त्रिपाठी, डी. के. : **विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका**, 2003,46, 73-80.

4. मिश्रा, एस. पी. तथा चौबे, एस. के. : Geomorphic Features and their relation with agricultural land quality : A case study of Chahanino Block, Chandauli District transactions, 1999, 21, 2, 23-34.

5. राघवस्वामी, वी. : Geographic Role of Satellite remote sensing in land system mapping : Land resources Inventory and Land use planning, Photonirvachak, ISRS, Dehradun, 1982, 10(3).

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 3, July 2003

वृत्ताकार झिल्ली के बलकृत स्पन्दनों को नियन्त्रित करने वाले सामान्य अवकल समीकरण के हल में सार्वीकृत H-फलन का सम्प्रयोग

चेनाराम तथा दिनेश कुमार

गणित तथा सांख्यिकी विभाग, जे. एन. व्यास युनिवर्सिटी,

जोधपुर (राजस्थान)

[प्राप्त - दिसम्बर 11, 2002]

सारांश

वृत्तीय झिल्ली के बलकृत स्पन्दनों को नियंन्त्रित करने वाले सामान्य अवकल समीकरण को हल करने में सार्वीकृत फलन का सम्प्रयोग प्रदर्शित किया गया है। प्राप्त परिणामों से प्रसाद इत्यादि [9] तथा स्नेडान [13] द्वारा सिद्ध किये गये परिणामों का एकीकरण तथा विस्तार प्राप्त होता है।

Abstract

An application of the generalized H-function in solving the general differential equation governing the forced vibrations of a circular membrane. *By* Chena Ram and Dinesh Kumar, jai Narain Vyas University, Jodhpur (Raj.).

An application of the generalized H-function in solving the general differential equation governing the forced vibration of a circular membrane is demonstrated. The results provide unification and extension of the results proved by Prasad, et al[9] and Sneddon [13]

1. प्रस्तावना

इनायत हुसेन ने [5] फाक्स के H-फलन का सार्वीकरण निम्नांकित रूप में प्रस्तुत किया है -

$$\overline{H}(z)=\overline{H}_{p,q}^{m,n}[z]=\overline{H}_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}(a_j,A_j;a_j)_{1,n},(a_jA_j)_{n+1,p}\\(b_jB_j)_{1,m},(b_j,B_j;b_l)_{m+1,q}\end{matrix}\right.\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\theta(s)z^s ds \qquad (1.1)$$

जहाँ
$$\Theta(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma\left(b_j-B_js\right)\prod_{j=1}^{n}\left\{\Gamma(1-a_j+A_js)\right\}^{a_j}}{\prod_{j=m+1}^{q}\left\{\Gamma(1-b_jB_js)\right\}^{b_1}\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-A_js)} \qquad (1.2)$$

जिसमें कतिपय Γ-फलन के भिन्नात्मक घात रहते हैं।

पाठकों को $\overline{H}$-फलन की विस्तृत परिभाषा के लिए बुशमैन तथा श्रीवास्तव [1], इनायत हुसेन [5] एवं सक्सेना [10] के शोधपत्र देखने चाहिए।

वितरणीय $\overline{H}$-फलन रूपान्तर के लिए एबेलियन प्रमेय तथा संमिश्र प्रतिलोम प्रमेय को सक्सेना तथा गुप्ता [11,12] ने स्थापित किया है। जब घातांक $a_i = b_j = 1, \forall_i, J$ तो H -फलन फाक्स [3] द्वारा परिभाषित H-फलन में समानीत हो जाता है।

H-फलन तथा उसके गुणों का विस्तृत विवरण मथाई तथा सक्सेना [8] के मोनोग्राफ में उपलब्ध है। हाल ही में किल्बस तथा सैगो [6] ने H-फलन के उपगामी प्रसार का विस्तृत ब्यौरा दिया है।

2. परिमित समाकल

हम अगली विवेचना में निम्नांकित परिणाम का उपयोग करेंगे -

$$\int_0^y x^{\rho-1}(y-x)^{\mu-1}\overline{H}_{p,q}^{m,n}\left[kx^{-u}(y-x)^{-v}\right]dx$$

$$=y^{\rho+\mu-1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r}{(r!)^2}\left(\frac{w_iy}{2}\right)^{2r}$$

$$\times H_{p+1,q+2}^{m+2,n}\left[ky^{-u+v}\left|\begin{matrix}(\alpha_jA_j;a_j)_{1,n},(\alpha_jA_j)_{n+1,p},(\rho+\mu+2r,u+v)\\(\rho+2r,u),(\mu,v),(\beta_j,B_j)_{1,m},(\beta_j,B_j,b_j)_{m+1,q}\end{matrix}\right.\right] \qquad (2.1)$$

जहाँ $u, v \geq \text{Re}\left[\rho + 2r - u \min_{i \in j \leq m}\left(\frac{\beta_j}{B_i}\right)\right] > 0; r \geq 0, \text{Re}\left[\mu - v \min_{i \in j \leq m}\left(\frac{\beta_j}{B_j}\right)\right] > 0,$

$$|\arg k| < \frac{1}{2}\pi\Omega,$$

$$\Omega = \sum_{j=1}^{m}|B_j| + \sum_{j=1}^{n}|a_j A_j| - \sum_{j=m+1}^{q}|b_j B_j| - \sum_{j=n+1}^{p}|A_j| > 0$$

तथा $\lambda = \sum_{j=1}^{m}|B_j| + \sum_{j=m+1}^{q}|B_j \beta_j| - \sum_{j=1}^{n}|A_j \alpha_j| - \sum_{j=n+1}^{p}|A_j| \geq 0.$

उपपत्ति (2.1) को विकसित करने के लिए बेसेल फलन को उसकी समतुल्य श्रेणी के रूप में प्रसारित करके तथा सूत्र

$$\int_0^y x^{\rho-1}(y-x)^{\mu-1}\overline{H}_{p,q}^{m,n}\left[kx^{-u}(y-x)^{-v}\right]dx$$

$$= y^{\rho+\mu-1}\overline{H}_{p+1,q+2}^{m+2,n}\left[ky^{-(u-v)}\left|\begin{matrix}(\alpha_j, A_j; a_j)_{1,n}, (\alpha_j, A_j)_{n+1,p}, (\rho+\mu, u+v) \\ (\rho, u), (\mu - v), (\beta_j, B_j)_{1,m}, (\beta_j, B_j, b_j)_{m+1,q}\end{matrix}\right.\right]$$

द्वारा पदशः समाकलित करके विकसित किया जा सकता है जिसे गुप्ता तथा सोनी [4] ने प्राप्त किया है।

इस अनुभाग में (1.1) में द्वारा परिभाषित $\overline{H}$-फलन का उपयोग सामान्य अवकल समीकरण (स्नेडान [13], Eq.(86),p.125)

$$\frac{\partial^z z}{\partial x^2} + \frac{1\partial z}{x\partial x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{c^2 \partial t^2} - \frac{P(x,t)}{T}, \tag{2.2}$$

को हल करने के लिए प्रयुक्त किया गया है जो a त्रिज्यावाली वृत्ताकार झिल्ली के बलकृत संमितीय स्पन्दनों के द्वारा नियंत्रित है जहाँ 'Z' उस बिन्दु का अनुप्रस्थ विस्थापन है जिसके ध्रुवीय निर्देशांक (x,θ) हैं जो तल $z=0$ से झिल्ली के हैं, $c^2 = T/\sigma$, जहाँ t एकसमान तनाव तथा σ द्रव्यमान है प्रति इकाई क्षेत्रफल और $p(x,t)$ बाह्यबल है प्रतिइकाई क्षेत्रफल जो झिल्ली पर तल $z=0$ पर लम्ब है और स्पन्दन उत्पन्न करता है।

हम (2.2) को निम्नांकित सीमान्त प्रतिबन्धों के अन्तर्गत हल करेंगे -

(i) प्रारम्भ में $t=0$ पर $z=f(x)$ तथा $\frac{\partial z}{\partial t} g(x)$

(ii) $z=0$ जब $x=a$ समस्त $t>0$ के लिए

(i) से देखा जाता है कि झिल्ली स्थिति $z=f(x)$ से वेग $\frac{\partial z}{\partial t} g(x)$ के साथ गति करती है। हम यह भी कल्पना करते हैं कि बाह्यबल $P(x,t)$, जो कम्पन उत्पन्न करता है वह सामान्य आचरण वाला है जिसे $P(x,t)=F(x)\,G(t)$ द्वारा व्यक्त करते हैं जहाँ $F(x)$ केवल x का फलन है और $G(t)$ केवल t का फलन है। हम (2.2) को हल करने के लिए $f(x), g(x), F(x), G(t)$ को (1.1) द्वारा परिभाषित सार्वीकृत H- फलन मान लेते हैं। परिणाम (2.1) को जिसमें $\overline{H}$ - फलन निहित है आगे के विश्लेषण में प्रयुक्त किया जावेगा।

3. परिमित हैंकेल रूपान्तर

(2.2) में $x J_0(\xi_1 x)$ से गुणा करने पर और 0 से a तक x के प्रति समाकलन करने तथा सीमान्त प्रतिबन्ध (ii) का उपयोग करने पर हमें पता चलता है कि शून्य कोटि का परिमित हैंकल रूपान्तर (स्नेडोन [13,p.127])

$$z_t = \int_0^{a} x z(x,i) J_0(\xi_i x)\, dx \qquad (3.1)$$

सामान्य रेखीय अवकल समीकरण

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+c^2\xi_i^2\right)^{-} zj = \frac{1}{\sigma}\overline{P}(\xi_i,t), \qquad (3.2)$$

की तुष्टि करता है। जहाँ ξ_1 अबीजीय समीकरण

$$J_0(\xi_i a)=0 \qquad (3.3)$$

का मूल है तथा $P(\xi_1,t)$ से $p(x,t)$ का परिमित हैंकेल रूपान्तर सूचित होता है।

4. प्रमेय का हल

हम f(x) तथा g(x) को $\overline{H}$ - फलन के पदों में निम्नवत् परिभाषित करते हैं -

$$f(x)=x^{\rho-2}(a-x)^{\mu-1}\,\overline{H}_{p,q}^{m,n}\left[kx^{-u}(a-x)^{-v}\left|\begin{matrix}(\alpha_j A_j;a_j)_{1,n},(\alpha_j A_j)_{n+1,p}\\(\beta_j,B_j)_{1,m},(\beta_j,B_j;b_j)_{m+1,q}\end{matrix}\right.\right] \qquad (4.1)$$

तथा

$$g(x) = x^{\rho'-2}(a-x)^{\mu'-1}\overline{H}^{m',n'}_{p',q'}\left[k^{*}x^{-u'}(a-x)^{-v'}\left|\begin{matrix}(\alpha'_j,A'_j;a_j)_{1,n'},(\alpha'_j,A'_j)_{n'+1,p'}\\(\beta'_j,B'_j)_{1,m'},(\beta'_j,B'_j;b'_j)_{m'+1,q'}\end{matrix}\right.\right] \quad (4.2)$$

इसी तरह $f(x)$ तथा $G(t)$ को $\overline{H}$ -फलन के पदों के रूप में निम्नवत् परिभाषित करते हैं -

$$F(x) = x^{\rho'''-2}(a-x)^{\mu'''-1}.\overline{H}^{m''',n'''}_{p''',q'''}$$

$$.\overline{H}^{m'',n''}_{p'',q''}\left[dx^{-u''}(a-x)^{-v''}\left|\begin{matrix}(\alpha''_j,A''_j;a_j)_{1,n''},(\alpha''_j,A''_j)_{n''+1,p''}\\(\beta''_j,B''_j)_{1,m''},(\beta''_j,B''_j;b''_j)_{m''+1,q''}\end{matrix}\right.\right] \quad (4.3)$$

$$G(t) = x^{\rho'''-2}(a-t)^{\mu'''-1}.\overline{H}^{m''',n'''}_{p''',q'''}$$

$$.\overline{H}^{m''',n'''}_{p''',q'''}\left[d^{*}t^{-u'''}(a-t)^{-v'''}\left|\begin{matrix}(\alpha'''_j,A'''_j;a_j)_{1,n'''},(\alpha'''_j,A'''_j)_{n'''+1,p'''}\\(\beta'''_j,B'''_j)_{1,m'''},(\beta'''_j,B'''_j;b'''_j)_{m'''+1,q'''}\end{matrix}\right.\right] \quad (4.4)$$

जहाँ प्राचल तथा पूर्ण संख्याएँ (1.1) की तरह सम्बन्धित हैं ।

(2.1) से हमें

$$\overline{P}(\xi_i,t) = G(t)a^{\rho''+\mu''-1}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-1)^N}{(N!)^2}\left(\frac{\xi_i a}{2}\right)^{2N}$$

$$\times H^{m''+2}_{\rho'''+1,q''+2}\left[da^{(u'''+v'')}\left|\begin{matrix}(\alpha''_j,A''_j;a_j)_{1,n''},(\alpha''_j,A''_j)_{n''+1,p''}(\rho''+\mu''+2N,u''+v'')\\(\rho''+2N,u'')(\mu'',v'')(\beta''_j,B''_j)_{1,m''},(\beta''_j,B''_j;b''_j)_{m''+1,q''}\end{matrix}\right.\right] \quad (4.5)$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$u''n''\geq 0.\mathrm{Re}\left[\rho''+2N-u''\min_{i\geq j\geq m}\left(\frac{\beta''}{B''_i}\right)\right]>;N\geq 0,\mathrm{Re}$$

$$\left[\mu''-v''\min_{1\leq j\leq m''}\left(\frac{\beta''}{B''_j}\right)\right]>0,|\arg d|<\frac{1}{2}\pi\Omega'',$$

$$\Omega'' = \sum_{j=1}^{m''} |B''_i| + \sum_{j=i}^{n^*} |a''_i A''_j| - \sum^{q''} |b''_j B''_j| - \sum_{j=n''+1}^{p''} |A''_j| > 0$$

$$\lambda'' = \sum_{j=1}^{m''} |B''_j| + \sum_{j=m''+1}^{q''} B''_j \beta''_j | - \sum_{j=1}^{n''} |A''_j \alpha''_j| - \sum_{j=n''+1}^{p''} |A''_j| \geq 0$$

सीमान्त प्रतिबन्ध (i) से हमें ज्ञात होता है कि (3.2) का पूरक फलन निम्नवत् है [स्नेडान [13.p.129]

$$\bar{z}_j = \cos(c\xi_i t)\int_0^a xf(x)/J_0(\xi_i x)dx + \frac{\sin(c\xi_i t)}{c\xi_i}\int_0^a xg(x)J_0(\xi_1 . x)dx. \qquad (4.6)$$

स्नेडान [13.Eq.(44) p.83] के द्वारा (4.6) का प्रतिलोमन करने पर हमें अन्ततः झिल्ली के विस्थापन के लिए

$$z = \frac{2}{a^2}\sum_i \frac{j_0(\xi_i x)}{|j_i(\xi_i a)|^2}\cos(c\xi_i t)\int_0 x\, f(x)\, j_0(\xi_i x)dx$$

$$+\frac{2}{ca^2}\sum_i \frac{j_0(\xi_i x)}{|j_i(\xi_i a)\ |^2}\sin\frac{\sin(c\xi_i x)}{\xi_i}\int_0^a x\, g(x)\, j_0(\xi_i x)dx$$

$$+\frac{2a^{\rho^*+u''-3}}{c\sigma\xi_i}\sum_i\sum_{x=0}^{\alpha}\frac{(-1)^x}{(N!)^2}\left(\frac{\xi_i a}{2}\right)^{2x}\frac{j_0(\xi_i x)}{|j_i(\xi_i a)|^2}$$

$$\overline{H}^*\left[da^{-(u^*+v^*)}\right]\int_0^t G(u)\sin\{c\xi_i(t-u)\}du, \qquad (4.7)$$

प्राप्त होता है जहाँ $\overline{H}^*\left[da^{-(u^*+v^*)}\right]$(4.5) के दक्षिण पक्ष का H-फलन है,योगफल (3.3) के समस्त घन मूलों के लिए है और (4.5) में दिये हुए प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं । (2.1) से समाकलों के मानों को (4.7) में रखने तथा समाकल

$$\int_0^i G(u)\sin\{c\xi_i(t-u)\}du$$

का मान $\sin\{e\xi(t-u)\}$ को (2.2) की सहायता से $\{c\xi_i(t-u)\}$ के घातों में विस्तार करके ज्ञात करने पर हमें (2.2) का पूर्ण हल निम्नांकित रूप में प्राप्त होता है -

$$z(x,t) = 2a^{\rho+\mu-3}\sum_i\sum_{N=0}^{\alpha}\frac{(-1)^N}{(N!)^2}\frac{j_0(\xi_i x)}{[j_1(\xi_i a)]^2}\left(\frac{\xi_i a}{2}\right)^{2N}\cos\,(c\xi_i t)$$

$$\overline{H}^{m+2,n}_{p+1,q+2}\left[ka^{(u+v)}\left|\begin{matrix}(\alpha_j,A_j;a_j)_{1,n},(\alpha_j,A_j)_{n+1,p}(\rho+\mu+2N,u+v\\(\rho+2N,u),(u,v),(\beta_j,B_j)_{1,m},(\beta_j,B_j;b_j)_{m+1,q}\end{matrix}\right.\right]$$

$$+\frac{2a^{\rho'+u'-3}}{c}\sum_i\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-1)^N}{(N!)^2}\frac{(j_0\xi_i x)}{[j_1(\xi_i a)|]^2}\left(\frac{\xi_i a}{2}\right)^{2N}\frac{\sin(c\xi_i t)}{\xi_i}$$

$$\overline{H}^{m'+2,n'}_{p'+1,q'+2}\left[k*a^{-(u'+v')}\left|\begin{matrix}(\alpha'_j,A'_j;a'_j)_{1,n'},(\alpha'_j A'_j)_{n'+1,p'}(\rho'+\mu'+2N,u'+v')\\(\rho'+2N,u'),(u',v'),(\beta'_j,B'_j)_{1,m'},(\beta'_j,B'_j;b'_j)_{m'+1,q'}\end{matrix}\right.\right]$$

$$+\frac{2a^{\rho''+\mu''-3,\rho'''+\mu'''-3}}{\sigma}\sum_i\sum_{R=1}^{\infty}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-1)^{R+N-1}}{(N!)^2(2R-1)!}\left(\frac{\xi_i a}{2}\right)^{2N}$$

$$(c\xi_i)^{2R-2}\frac{j_0(\xi ix)}{[j_1(\xi_j a)]^2}\overline{H}*\left[da^{-(u''+v'')}\right].\overline{H}**\left[d*t^{-(u'''+v''')}\right] \qquad (4.8)$$

जहाँ $\overline{H}^*\left[da^{-(u''+v'')}\right]$(4.8) के दक्षिण पक्ष में $\overline{H}$-फलन है।

$$\overline{H}^{**}\left[d^*t^{-(u'''+v''')}\right]$$

$$=\overline{H}^{m'''+2,n'''}_{p'''+1,q'''+2}\left[d't^{(u'''+v''')}\left|\begin{matrix}\alpha'''_j,A'''_j,a'''_j)_{1,n'''},(\alpha'''_j,A'''_j)_{n'''+1,p'''},\\(\rho'''-1,u'''),(\mu'''+2R-1,v'''),(\beta'''_j B'''_j)_{1,m'''},\end{matrix}\right.\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(\rho'''+\mu'''+2R-2,u'''+v''')\\(\beta'''_j,B'''_j,b'''_j)_{m'''+1,q'''}\end{matrix}\right]$$

समस्त t के लिए सीमान्त प्रतिबन्ध $z(a,t)=0$ तुष्ट होता है क्योंकि $J_0(\xi_i a)$ जो $z(a,t)$ के प्रत्येक पद में उपस्थित है वह शून्य है।

प्रारम्भिक प्रतिबंध

$$z(x,0)=f(x) \quad \text{तथा} \quad \frac{\partial}{\partial t}\{z(x,t)\}_{t=0}=g(x)$$

प्रतिलोम प्रमेय 30 के आधार पर [स्नेडान [13.p.83] तुष्ट हो जाते हैं।

5. विशिष्ट दशाएँ

जब झिल्ली $t=0$ पर सन्तुलन स्थिति में विश्राम अवस्था में होती है तो $f(x)=0=g(x)$ अतः (4.8) से (2.2) का हल

$$z(x,t) = \frac{2}{\sigma} a^{\rho''+\mu''-3} t^{\rho'''+\mu'''-3} \sum_{i} \sum_{R=1}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^{R+N-1}}{(N!)^2 (2R-1)!} \left(\frac{\xi_i a}{2}\right)^{2N}$$

$$(c\xi_i)^{2R-2} \frac{j_0(\xi ix)}{[j_1(\xi_j a)]^2} \overline{H}^*\left[da^{-(u''+v'')}\right].\overline{H}^{**}\left[d^* t^{-(u'''+v''')}\right],$$

होगा जहाँ $\overline{H}^*$ तथा $\overline{H}^{**}$ वे ही $\overline{H}$ फलन हैं जो (4.8) में प्रयुक्त होते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय प्रो. आर. के. सक्सेना के आभारी हैं जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में रुचि ली।

निर्देश

1. बुशमैन, आर. जी. तथा श्रीवास्तव, एच. एम. : J. Phys. A : Math.Gen 1990, 23, 4707-4710.
2. एर्डेल्यी, ए. इत्यादि : Transcendental Functions, Vol. II, McGraw- Hill, New York 1953.
3. फाक्स, सी. : Trans. Amer. Math. Soc. 1961, 98, 395 - 429.
4. गुप्ता, के. सी. तथा सोनी, आर. सी. : Kyungpook Math. J 2001, 4, 97 - 104.
5. इनायत हुसेन, ए. ए. : J Phys. A. : Math Gen. 1987, 20, 4119 - 4128.
6. किल्बस, ए. ए. तथा सैगो, एम. : Proc. Intern. Workshop, 12-17 August 1994, pp. 99-122 Science Culture Techn. Publ. Singapore 1995.
7. वही : J. Appl. Math. Stoch Anal 1999 ,12, 191-204.
8. मथाई, ए. एम. तथा सक्सेना, आर. के. : The H-function with applications in Statistics and other disciplines. John Wiley and Sons. Inc. 1978.
9. प्रसाद, वाई. एन. इत्यादि : Def. Sci. Jour. (India) 1975, 25, 3, 107 - 114.
10. सक्सेना, आर. के. : Le Mathematiche, 1998, 53, 123-131.
11 सक्सेना, आर. के. तथा गुप्ता, नीलिमा : Indian J. Pure Appl. Math. 1994, 25-8, 869-879.
12. वही : Indian J. Pure Appl. Math. 1995, 26, 1-7.
13. स्नेडान, आई. एन. : Fourier Transforms, McGraw-Hill, New York, 1951.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 3, July 2003

प्रकाशउत्तेजित बहुलक पदार्थ व उनके उपयोग : एक समीक्षा

पी.सी. पंत तथा ए. के. सक्सेना

डी. एम. एस. आर. डी. ई. कानपुर

[प्राप्त - जनवरी 31, 2003]

सारांश

कुछ बहुलक पदार्थों में प्रकाश अथवा ऊर्जा युक्त विकिरणों के किरणन से उनके गुणधर्म में परिर्वतन हो जाते हैं। यह परिर्वतन इन बहुलक पदार्थों की सतह द्वारा उच्च ऊर्जा युक्त विकिरणों के अवशोषित होने के फलस्वरूप होता है। इन बहुलक पदार्थों को प्रकाशउत्तेजित अथवा विकिरण-उत्तेजित बहुलक कहा जाता है। जिन पदार्थों में किरणन के पश्चात् अवकर्षण (Deterioration) होता है, उनकी घुलनशीलता बढ़ जाती है। इन पदार्थों को धनात्मक प्रतिरोधी कहा जाता है। इसके विपरीत जिन पदार्थों में किरणन के पश्चात् अणुओं में तिर्यक बन्धन हो जाता है और घुलनशीलता कम हो जाती है, उन्हें ऋणात्मक प्रतिरोधी कहा जाता है। इन पदार्थों का आधुनिक इलेक्ट्रानिकी के क्षेत्र में अत्यन्त महत्व है।

Abstract

Radiation sensitive polymeric materials and their uses: A review. *By* P.C. Pant and A.K. Saxena, D.M.S.R.D.E., Kanpur.

Some polymeric materials upon irradation with light or high energy radiation change their properties. This change is due to absorption of light or energy of radiations at their surface. These polymers are called photo-polymers or radiation sensitive polymers. Upon irradiation if there is deterioration and increase in solubility observed, they are known as positive photoresist. If there is cross linking of light or radiations they are known as negative photoresist.

These materials are useful in modern electronics.

जब उच्च ऊर्जा युक्त विकिरणों द्वारा बहुलक पदार्थों का किरणन होता है तो ये विकिरण

बहुलक पदार्थ की सतह पर अवशोषित हो जाते हैं । पराबैंगनी तथा दृश्य प्रकाश द्वारा उत्सर्जित फोटोनों के द्वारा बहुलक पदार्थों में किरणन द्वारा जो भी रासायनिक परिर्वतन होते हैं, उनमें अवशोषित ऊर्जा का एक अल्प भाग ही अभिक्रिया में प्रयुक्त होता है।

इस भौतिक अभिक्रिया में अतिरिक्त ऊर्जा उष्मा के रूप में विसर्जित हो जाती है। विकिरण की तीव्रता मापने की इकाई 'ग्रे' है। 'ग्रे' एक जूल प्रति किलो के समतुल्य होती है। इस प्रकार एक मिली 'ग्रे' तीव्रता की ऊर्जा जल में अवशोषित होने पर तापमान में 24 डिग्री सेल्सियस की वृद्धि होती है। बहुलक पदार्थों में यह वृद्धि 24 डिग्री सेल्सियस से अधिक हो सकती है। इन पदार्थों में उच्च ऊर्जा युक्त विकिरण के किरणन के फलस्वरूप आयनीकरण या उत्तेजन प्रारंभ होता है और इन्हीं उत्तेजित आयन कणों द्वारा विभिन्न प्रकार की रासायनिक अभिक्रियाएँ प्रेरित होती हैं।

बहुलक पदार्थों में विकिरण किरणन द्वारा मुख्य रूप से दो प्रकार के रासायनिक परिर्वतन होते हैं :

1. **श्रृंखला तिर्यकबद्ध परिर्वतन (Chain cross linking changes)** - इस परिर्वतन के परिणामस्वरूप अणु भार में वृद्धि होती है। निरंतर श्रृंखला तिर्यकबद्ध परिर्वतन होने से बहुलक के अणु के आकार में वृद्धि हो जाती है। इस अवस्था में बहुलक पदार्थ की घुलनशीलता पूर्ण रूप से समाप्त हो जाती है। घुलनशील अवयव की मात्रा विकिरण की मात्रा तथा किरणन काल (Exposure time) के साथ-साथ परिवर्तित होती रहती है।

2. **श्रृंखलाबद्ध परिर्वतन (Chain scission change) :** इस परिर्वतन के परिणामस्वरूप बहुलक के अणुभार में कमी आ जाती है । बहुलक पदार्थ के अणुभार पर आधारित कई भौतिक गुण जैसे सुघट्ता (Flasticiy) ,तनाव शक्ति (Tensile Strength) आदि की गुणवत्ता में कमी आ जाती है। इस अभिक्रिया में छोटे-छोटे अणु भार वाले उत्पाद उत्पन्न होते हैं। इस प्रकार बहुलक की संरचना प्रभावित होने से बहुलक का अवर्कषण (Deterioration) हो जाता है।

विकिरणउत्तेजित बहुलक इलेक्ट्रानिकी के क्षेत्र में अत्यन्त महत्वपूर्ण पाए गये हैं। इन बहुलकों को प्रकाशप्रतिरोधी बहुलक (Photoresist Polymers) कहा जाता है।

प्रकाशप्रतिरोधी बहुलक

प्रकाशप्रतिरोधी बहुलक उन पदार्थों को कहा जाता है जो किरणन के प्रभाव से अपनी अनावरित सतह (Exposed Area) तथा आवरित सतह (Unexposed Area) में इच्छित गुणों का समावेश कर लेते हैं जिससे क्रियाधार अपनी सुविधानुसार अवरोध (Masking) उत्पन्न

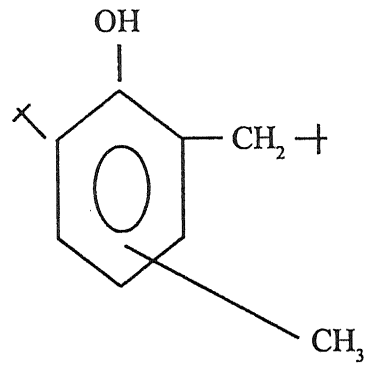
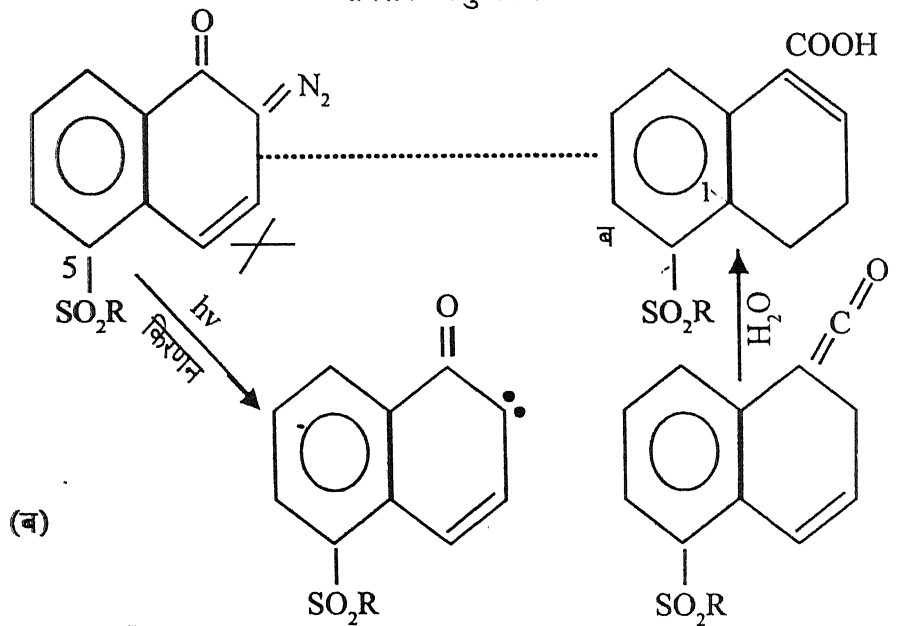
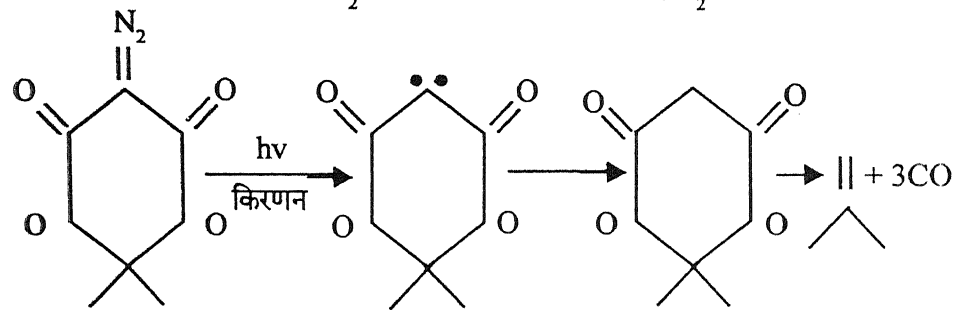
कर सकता है। इन पदार्थों का क्रियाधार की सतह पर लेपन (Coating) किया जाता है। मुख्य रूप से विद्युतचुम्बकीय तथा पराबैंगनी विकिरणों का किरणन बहुलक पदार्थों में उपयोग किया जाता है।

प्रकाशप्रतिरोधी बहुलक सामग्री (Photoresist Polymer materials)

प्रकाशप्रतिरोधी बहुलक सामग्री के अणु का श्रृंखला तिर्यकबद्ध (Cross Linking) विघटन होता है। प्रकाशउत्तेजी अणु क्रियाकारी आयन उत्पन्न करते हैं। इसके विपरीत एकलक सामग्री (Monomer Materials) का बहुलीकरण होना भी संभव है। इससे घुलनशीलता घट जाती है। श्रृंखलाबद्ध परिर्वतन में घुलनशीलता बढ़ जाती है। प्रकाशप्रतिरोधी बहुलकों में किरणन की क्रिया द्वारा मुख्य रूप से दो प्रकार के परिर्वतन होते हैं अतः इन्हें दो श्रेणियों में वर्गीकृत किया गया है।

(i) धनात्मक प्रतिरोधी (Positive Photoresist) - वह बहुलक सामग्री जो विकिरण के किरणन के फलस्वरूप अपनी घुलनशीलता बढ़ाने की प्रवृत्ति रखते हैं, उन्हें धनात्मक प्रतिरोधी कहा जाता है। इस प्रक्रिया में बहुलक पदार्थ का अवकर्षण (Deterioration) हो जाता है। इलेक्ट्रानिकी के क्षेत्र में वी. एल. एस. आई. उद्योग का कार्यगृह नोवलेक डाइएजोनेप्थोक्वीनोन प्रकाश अवरोधी है। ये पदार्थ उन्नीसवीं सदी के प्रारम्भ में मुद्रण उद्योग में प्रयोग में लाए जा रहे फोटोप्लेटस के समतुल्य हैं।

नोवलेक मेट्रिक्स रेजिन को प्रतिस्थापित फीनोल तथा फार्मेल्डीहाइड के संघनित बहुलीकरण द्वारा बनाया जाता है। यह क्षारीय जल के घोल में अघुलनशील होता है। डाइएजोनेप्थोक्वीनोन एक प्रकाशक्रियाकारी संदमक (Inhibitor) है। प्रकाश के किरणन से इस अणु में वुल्फ पुनर्विन्यास (Woolf rearrangement) हो जाता है जो क्षारीय जल में घुलनशील इंडीन कार्बोजाइलिक अम्ल में परिर्वतित हो जाता है। यह प्रक्रिया संयुक्त फिल्म (Composite Film) के अनावरित क्षेत्र को क्षारीय घुलनशील बना देती है। फलतः किसी वस्तु की छाया या प्रतिबिम्ब का मार्ग खुल जाता है।

हेटापाकीजे ने पालीमिथाक्रायलेट को उच्च वियोजक धनात्मक प्रतिरोधी बहुलक सामग्री के रूप में मान्यता दी । एक्रायलिक एकलक (Acrylic Monomer) के बहुलीकरण द्वारा एक्रायलिक एधेसिव बनाए जाते हैं। यथा कोडाक कंपनी द्वारा सायनोएक्रायलेट का विकास किया गया है, जो एक अच्छा प्रकाश प्रतिरोधी है।

यद्यपि विकिरण ऊर्जा का अवशोषण केवल क्रियाधार (Substitute) के इलेक्ट्रान घनत्व पर निर्भर करता है, परन्तु कुछ रासायनिक बंध तथा समूह विशेष रूप से विकिरणउत्तेजित होते हैं, जैसे - COOH समूह (कार्बोक्सिलिक), X - हेलोजन, - SO_2, NH_2, C = C। इन्हें विकिरणउत्तेजित समूह कहा जाता है। इसके विपरीत कार्बनिक अणुओं में ऐरोमैटिक समूह को सार्थक विकिरणप्रतिरोधी के रूप में जाना जाता है।

प्रारम्भिक अनुसंधानों से ज्ञात होता है कि हाइड्रोजन जो साइक्लोहेक्सेन (जी = 5) और बेंजीन (जी = 0.04) तरल अवस्था में पृथक-पृथक या इनके मिश्रण से प्राप्त होती है, विकिरणप्रतिरोधी पाई गई है। इसी प्रकार पॉलीऐमीनो अम्ल में मुख्य रूप से फीनोल समूह प्रकाशप्रतिरोधी पाया गया है।

(ii) ऋणात्मक प्रतिरोधी (Negative Resist) - यदि बहुलक पदार्थों में विकिरण किरणन के द्वारा उनकी घुलनशीलता कम हो जाती है और तिर्यकबद्ध अणु परिर्वतन होते हैं तो ऋणात्मक प्रतिरोधी गुण समाविष्ट हो जाता है।

कुछ ऋणात्मक प्रकाशप्रतिरोधी (Negative Photoresist) बहुलकों के उदाहरण हैं -

1. विनाइलधारी बहुलक :

   (अ) पॉली (डाइएलायल) आर्थोथैलेट

   (ब) पॉली-एलायल मीथाएक्रायलेट

2. इपॉक्सीधारी बहुलक :

   (अ) 1, 4 पॉलीब्यूटाडीन

   (ब) पॉलीग्लायसिडायल मिथाएक्रालेट को एथिएक्रायलेट (सी. ओ. पी.)

3. हैलोजनधारी बहुलक :

   पॉली (2,3 डाइक्लोरोप्रोपाइल एक्रायलेट डी. सी. पी. ए.)

4. साइक्लाइज्ड रबर (Cyclized Rubber) तथा बिस-एराइजेलाइड तिर्यकबद्ध एजेन्ट के साथ

5. जलीय क्षार घुलनशील फीनोलिक रेजिन, जैसे पॉली (पी विनाइल फीनोल) तथा प्रकाश उत्तेजित एजेन्ट 3, 3' डाइएजोफिनाइल सल्फोन।

उपयोग

प्रकाशप्रतिरोधी बहुलक पदार्थ अत्यन्त महत्वपूर्ण हैं। इनका उपयोग आजकल सूक्ष्म लीथोग्राफी में किया जा रहा है। इनके समेकित परिपथ की आई. सी. तथा वी. एल. एस. आई. इलेक्ट्रानिक अवयवों में महत्वपूर्ण उपयोग की संभावनाएं आंकी गई हैं। इस तकनीकी का भारत में अभी पूर्ण रूप से विकास नहीं हुआ है। प्रतिरक्षा के क्षेत्र में प्रकाशप्रतिरोधी प्रौद्योगिकी का विकास किया जाना एक अत्यन्त उपयोगी व महत्वपूर्ण कदम होगा।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 3, July 2003

बहुसूचक हरमाइट बहुपदों के कुछ संबंध

एच. एस. पी. श्रीवास्तव

गणित विभाग, शासकीय कला-विज्ञान स्नातकोत्तर महाविद्यालय

रतलाम (म. प्र.)

[प्राप्त - जनवरी 17,2003]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में बहुसूचक हरमाइट बहुपदों के कुछ संबंध ज्ञात किये गये हैं।

Abstract

Some relations of multi-index Hermite polynomials.

By H.S.P. Shrivastava, Mathematics Department, Government Arts-Science P.G. College, Ratlam (M.P.)

Some relations of multi-index Hermite polynomials are established in the present paper.

प्रस्तावना

बहुपदों के सिद्धांत एवं एक तथा अनेक चरों वाले हाइपरज्यामितीय फलनों के एकतांकारी प्रयास में लेखक ने बहुसूचक हरमाइट बहुपद परिभाषित किये है।[3] इनको व्यापकीकृत त्रि-हाइपरज्यामितीय फलनों[2] एवं व्यापकीकृत लॉरीसेला फलनों में भी परिभाषित किया गया है जिसे श्रीवास्तव तथा दाओस्ता[4] ने परिभाषित किया।

बहुचर्चित एक सूचक हारमाइट बहुपद एवं इसका जनक-फलन निम्न प्रकार परिभाषित होते है [1; eq, (1), (2); p. 187] :

$$H_n(x) = \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^r \, n! \, (2x)^{n-2r}}{r! \, (n-2r)!} \qquad (1.1)$$

और

$$\exp\left(2xt - t^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)\, t^n}{n!} \qquad (1.2)$$

x एवं t के सभी परिमित मानों के लिये वैध है।

दो, तीन एवं P- सूचक हरमाइट बहुपद को श्रेणी एवं जनक-फलन के रूप में लेखक ने [3] निम्न प्रकार से परिभाषित किया है :

$$Hn,m(x) = \sum_{r=o}^{[n/2]}\sum_{s=0}^{[m/2]}\frac{m!n!(-1)^{r+s}(2r+2s)!\,(2x)^{n+m-2r-2s}}{(n-2r)!(m-2s)!(2r)!(2s)!(r+s)!} \tag{1.3}$$

$$= (2x)^{n+m} F^{1:2;2}_{o:1;1}\left[\begin{matrix}(1/2;1,1):(-n/2,1);(-m/2,1),(-m+1/2); \left(\frac{-1}{2x^2}\right),\left(\frac{-1}{2x^2}\right)\\ ----:(1/2,1),---;(1/2,1),-----,\end{matrix}\right] \tag{1.4}$$

$$Hn,m,p(x) = \sum_{r=o}^{[n/2]}\sum_{s=0}^{[m/2]}\sum_{u=o}^{[p/2]}\frac{n.!m!.p!(2r+2s+2u)!(-1)^{r+s+u}(2x)^{n+m+p-2r-2s-2u}}{(2r)!(2s)!(2u)!(r+s+u)!(n-2r)!(n-2s)!(p-2u)!} \tag{1.5}$$

$$=(2x)^{n+m+p}F^{1:2;2;2;}_{o:1;1;1;}\left(\begin{matrix}(1/2;1,1,1):(-n/2,1),(-n+1/2,1);(-m/2,1)(-m+1/2,1);\\ ----:(1/2,1),---;(1/2,1),-----;\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(-p/2,1)(-p+1/2,1):\\ (1/2,1),--------:\end{matrix}\left(\frac{-1}{2x^2}\right),\left(\frac{-1}{2x^2}\right)\left(\frac{-1}{2x^2}\right),\right) \tag{1.6}$$

$$Hn_1,---,n_p(x) = \sum_{\substack{r_j=o\\(j=1,....,p)}}^{[n_j/2]}\frac{(\sum_{j=1}^{P}2r_j)!\prod_{j=i}^{P}n_j!\,(-1)^{\sum_{j=1}^{P}r_j}(2x)^{\sum_{j=1}^{P}n_j-2\sum_{j=1}^{P}r_j}}{(\sum_{j=i}^{P}r_j)!\prod_{j=1}^{P}(2r_j)!\qquad\prod_{j=1}^{P}(n_j-2r_j)!} \tag{1.7}$$

$$=(2x)^{n_1+\cdots+n_p}F^{1:2;---;2}_{o:1;---;1}\left(\begin{matrix}(1/2;1,---,1):(-n/2,1),(-n_1+1/2,1);---;(-n_p/2,1)(-n_p+1/2,1),\\ ---:(1/2,1),---;---;(1/2,1),---;\end{matrix}\right.$$

$$\left.\left(\frac{-1}{2x^2}\right),\ldots\ldots\ldots\ldots\left(\frac{-1}{2x^2}\right)\right) \tag{1.8}$$

$$\exp[2x(t+h)-(t+h)^2] = \sum_{n=o}^{\infty}\sum_{m=o}^{\infty}\frac{H,nm(x)t^nh^m}{n!.m!}, \tag{1.9}$$

$$\exp[2x(t+h+g)-(t+h+g)^2]=\sum_{n=o}^{\infty}\sum_{m=o}^{\infty}\sum_{P=o}^{\infty}\frac{Hn,m,p(x)t^n h^m g^p}{n!.m!P!}, \tag{1.10}$$

$$\exp[2x(t_1+--+t_p)-(t_1+----+t_p)^2]=\sum_{n_1=o}^{\infty}\sum_{n_p=o}^{\infty}\frac{Hn_1,---,n_p(x)t_1^{n}1--t_p^{n}p}{n!.m!P!}, \tag{1.11}$$

जहाँ पर

(i) (1.4), (1.6), (1.8) में आये F- फलन व्यापकीकृत बहुचरीय लॉरीसेला फलनों को निरूपित करते हैं [4,5]

(ii) समीकरण (1.2) एवं (1.3) से स्पष्ट है कि :

$Hn,m(x) \neq Hn, (x), Hm (x)$;

$Hn, m (x) \neq Hn + m(x)$; इसी प्रकार अन्य

(iii) समीकरण (1.3) में m = o लेने पर (s - श्रेणी खत्म हो जाती है केवल r- श्रेणी विद्यमान रहती है।) या n = o लेने पर r - श्रेणी खत्म हो जाती है (केवल s- श्रेणी विद्यमान रहती है।)

हमें प्राप्त होता है :

$$H_{n,o}(x)=\sum_{r=0}^{[n/2]}\frac{(-1)^r n!(2x)^{n-2r}}{(n-2r)!r!}=Hn(x), \tag{1.12}$$

$$H_{o,m}(x)=\sum_{s=0}^{[m/2]}\frac{(-1)^s m!(2x)^{m-2r}}{(m-2s)!s!}=Hm(x), \tag{1.13}$$

इसी प्रकार समीकरण (1.5), (1.7) से लिखा जा सकता है -

$$\begin{aligned}&Hn,m,o\ (x) = Hn,m\ (x),\\&Hn,o,o\ (x) = Hn\ (x);\\&Hn_1,---,n_{p-1},\ o\ (x) = Hn_1,\ ---,n_{p-1}(x),\\&Hn_1,o,---,o\ (x) = Hn_1\ (x),\end{aligned} \tag{1.14}$$

2. संबंध :

इस अनुभाग में हमने बहुसूचक हारमाइट बहुपदों के संबंधों को स्थापित किया है:-

$$Hn(x_1+x_2)=\sum_{r=0}^{n}\frac{n!Hn-r!(x)(2x^2)^r}{(n-r)!(m-s)!r!s!}, \tag{2.1}$$

$$Hn,m(x_1+x_2)=\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}\frac{n!m!(2x_2)^{r+s}Hn-r,m-s(x_1)}{(n-r)!(m-s)!r!s!}, \tag{2.2}$$

$$H_{n,m,p}(x_1+x_2)=\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}\sum_{u=0}^{p}\frac{n!m!p!(2x_2)^{r+s+u}H_{n-r,m-s,p-u}(x_1)}{(n-r)!(m-s)!(p-u)!r!s!p!}, \tag{2.3}$$

$$H_{n_1,\ldots,n_p}(x_1+x_2)=\sum_{r_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{r_p=0}^{n_p}\frac{n_1!\cdots n_p!(2x_2)^{r_1+\cdots+r_p}H_{n_1-r_1,\ldots,n_p-r_p}(x_1)}{(n_1-r_1)!\cdots(n_p-r_p)!r_1!\cdots r_p!}, \tag{2.4}$$

$$H_n(x_1+x_2)=\sum_{r=0}^{n}\frac{n!H_{n-r}(\sqrt{2}x_1)H_r(\sqrt{2}x_2)}{(\sqrt{2})^n(n-r)!r!}, \tag{2.5}$$

$$H_{n,m}(x_1+x_2)=\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}\frac{n!m!H_{n-r,m-s}(\sqrt{2}x_1)H_{r,s}(\sqrt{2}x_2)}{(\sqrt{2})^{n+m}(n-r)!(m-s)!r!s!} \tag{2.6}$$

$$H_{n,m,p}(x_1+x_2)=\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}\sum_{u=0}^{p}\frac{n!m!p!H_{n-r,m-s,p-u}(\sqrt{2}x_1)H_{r,s,u}(\sqrt{2}x_2)}{(\sqrt{2})^{n+m+p}(n-r)!(m-s)!(p-u)!r!s!u!} \tag{2.7}$$

$$H_{n,m,p}(x_1+x_2)=\sum_{r_1=0}\cdots\sum_{r_p=0}\frac{n_1!\cdots n_p!H_{n_1-r_1,\ldots,n_p-r_p}(\sqrt{2}x_1)H_{r_1,\ldots,r_p}(\sqrt{2}x_2)}{(\sqrt{2})^{n+m+p}(n-r)!(m-s)!(p-u)!r!s!u!} \tag{2.8}$$

$$H_n(x_1+x_2+x_3)=\sum_{r=0}^{n}\frac{n!(2(x_2+x_3))^{r}H_{n-r}(x_1)}{(n-r)!r!}, \tag{2.9}$$

$$H_{n,m}(x_1+x_2+x_3)=\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}\frac{n!m!(2(x_2+x_3))^{r+s}H_{n-r,m-s}(x_1)}{(n-r)!(m-s)!r!s!} \tag{2.10}$$

$$H_{n,m,p}(x_1+x_2+x_3)=\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}\sum_{u=0}^{p}\frac{n!m!p!(2(x_2+x_3))^{r+s+u}H_{n-r,m-s,p-u}(x_1)}{(n-r)!(m-s)!(p-u)!r!s!u!} \tag{2.11}$$

$$H_{n_1,\ldots,n_p}(x_1+x_2+x_3)=\sum_{r=0}^{n}\cdots\sum_{r_p=0}^{n_p}\frac{n!m!p!(2(x_2+x_3))^{r+s+u}H_{n-r,m-s,p-u}(x_1)}{(n-r)!(m-s)!(p-u)!r!s!u!} \tag{2.12}$$

$$H_n(x_1+x_2+\cdots+x_p)=\sum_{r=0}^{n}\frac{n!(2(x_2+\cdots+x_p))^{r}H_{n-r}(x_1)}{(n-r)!r!} \tag{2.13}$$

$$H_{n,m}(x_1+x_2+\cdots+x_p)=\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}\frac{n!m!(2(x_2+\cdots+x_p))^{r+s}H_{n-r,m-s}(x_1)}{(n-r)!(m-s)!r!s!} \tag{2.14}$$

$$H_{n,m,p}(x_1+x_2+\cdots+x_p)=\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{m}\sum_{u=0}^{p}\frac{n!m!p!(2(x_2+\cdots+x_p))^{r+s+u}H_{n-r,m-s,p-u}(x_1)}{(n-r)!(m-s)!(p-u)!r!s!}, \tag{2.15}$$

$$H_{n_1,\ldots,n_p}(x_1+x_2+\cdots+x_p)=\sum_{r_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{r_p=0}^{n_p}\frac{n_1!\cdots n_p!(2(x_2+\cdots+x_p))^{r_1+\cdots+r_p}H_{n_1-r_1,\ldots,n_p-r_p}(x_1)}{(n_1-r_1)!\cdots(n_p-r_p)!r_1!\cdots r_p!}, \tag{2.16}$$

$$Hn\left(x_1+---+x_p\right)=\sum_{r=0}^{n}\frac{n!\,Hn-r(\sqrt{2}x_1)\,Hr(\sqrt{2}(x_2+---+x_p))}{(\sqrt{2})^n\,(n-r)!\,r!}, \quad (2.17)$$

$$Hn\left(x_1+---+x_p\right)=\sum_{r=0}^{n}\frac{n!m!Hn-r,m-s(\sqrt{2}x_1)\,Hr,s(\sqrt{2}(x_2+---+x_p))}{(\sqrt{2})^{n+m}(n-r)!(m-s)!r!s!}, \quad (2.18)$$

$$H\,n,mp\left(x_1+---+x_p\right)=\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=o}^{n_p}\sum_{u=o}^{P}\frac{n!m!p!Hn-r,m-s,p-u(\sqrt{2}x_1)\,Hr_1,s,u(\sqrt{2}(x_2+---+x_p))}{(\sqrt{2})^{n+m+p}(n-r)!(m-s)!(p-u)!r!s!u!}, \quad (2.19)$$

$$H_{n_1},\text{---},n_p\left(x_1+\text{---}+x_p\right)=\sum_{r_1=0}^{n_1}\sum_{r_p=o}^{n_p}\frac{n_1!\text{---}n_p!H_{n_1}-r_1,\text{---},n_p-r_p(\sqrt{2}x_1)H_{r_1},\text{---}r_p(\sqrt{2}(x_2+\text{---}+x_p))}{(\sqrt{2})^{n_1+\text{---}+n_p}(n_1-r_1)!\text{---}(n_p-r_p)!r!\text{---}r_p!}, \quad (2.20)$$

सूत्र (2.1) की उपपत्ति : एकसूचक हरमाइट बहुपद के जनक-फलन (1.2) का उपयोग करने पर :

$$\sum_{n=o}^{\infty}\frac{Hn(x_1+x_2)t^n}{n!}=\exp[2(x_1+x_2)t-t^2]$$

$$\exp[2(x_1t-\exp 2x_2t)$$

सूत्र $\exp(x)=\sum_{n=o}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ एवं पुनः सूत्र (1.2) का दाहिने ओर प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है -

$$\sum_{n=o}^{\infty}\frac{Hn(x_1+x_2)t^2}{n!}=\sum_{n=o}^{\infty}\frac{Hn(x_1)t^n}{n!}\sum_{r=o}^{\infty}\frac{(2x_2t)^r}{r!}$$

$$=\sum_{n=o}^{\infty}\sum_{r=o}^{\infty}\frac{Hn-r(x_1)(2x_2t)^r t^n}{(n-r)!\;\;r!}$$

दोनों ओर के t^n के गुणांकों की तुलना करने पर हमें सूत्र (2.1) की प्राप्ति होती है। इसी प्रकार सूत्र (2.2), (2.3), (2.4) को सिद्ध किया जा सकता है।

सूत्र (2.5) की उपपत्ति : एकसूचक हरमाइट बहुपद के जनक-फलन (1.2) का उपयोग करने पर :

$$\sum_{n=o}^{\infty}\frac{Hn(x_1+x_2)(\sqrt{2}t)^n}{n!}=\exp[2(x_1+x_2)(\sqrt{2}t)-(\sqrt{2}t)^2]$$

$$=\exp[2(\sqrt{2x_1})t-t^2]\exp[2(\sqrt{2x_2})t-t^2]$$

पुनः सूत्र (1.2) का दाहिने ओर उपयोग करने पर :

$$= \sum_{n=o}^{\infty}\sum_{r=o}^{\infty}\frac{Hn(\sqrt{2}x_1)Hr(\sqrt{2}x_2)t^{n+r}}{n!\ \ r!}$$

$$\sum_{n=o}^{\infty}\sum_{r=o}^{\infty}\frac{Hn-r(\sqrt{2}x_1)Hr(\sqrt{2}x_2)t^{n}}{(n-r)!\ \ r!}$$

दोनों ओर के t^n के गुणांकों की तुलना करने पर हमें (2.5) सूत्र की प्राप्ति होती है। इसी प्रकार सूत्र (2.6) से (2.8) को सिद्ध किया जा सकता है।

सूत्र (2.10) की उपपत्ति : दो-सूचक हरमाइट बहुपद के जनक-फलन (1.9) का उपयोग करने पर :

$$\sum_{n=o}^{\infty}\sum_{m=o}^{\infty}\frac{Hn,m(x_1+x_2+x_3)t^n h^m}{n!m!} = \exp[2(x_1+x_2+x_3)(t-h)-(t+h)^2]$$

$$= \exp[2x_1(t+h)-(t-h)^2]\exp[2(x_2+x_3)(t-h)]$$

सूत्र $\exp(x)=\sum_{n=o}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ एवं पुनः सूत्र (1.9) का दाहिने ओर प्रयोग करने पर :

$$= \sum_{n=o}^{\infty}\sum_{m=o}^{\infty}\frac{Hn,m(x_1)t^n h^m}{n!m!}.\sum_{r=o}^{\infty}\frac{(2(x_2+x_3))^r(t+h)^r}{r!}$$

सूत्र $(a+x)^n=\sum_{r=o}^{n}(^n_r a^{n-k}x^h$,का प्रयोग करने पर

$$= \sum_{n=o}^{\infty}\sum_{m=o}^{\infty}\sum_{r=o}^{\infty}\sum_{s=o}^{r}\frac{Hn,m(x_1)(2(x_2+x_3))^r t^{n+r-s}h^{m+s}}{n!m!s!(r-s)!}$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty}\sum_{m=o}^{\infty}\sum_{r=o}^{\infty}\sum_{s=o}^{r}\frac{Hn,m(x_1)(2(x_2+x_3))^{r+s} t^{n+r}h^{m+s}}{n!m!s!(r-s)!}$$

$$= \sum_{n=o}^{\infty}\sum_{m=o}^{\infty}\sum_{r=o}^{\infty}\sum_{s=o}^{m}\frac{Hn-r,m-s(x_1)(2(x_2+x_3))^{r+s} t^{n}h^{m}}{(n-r)!(m-s)!r!s!}$$

दोनों ओर के $t^n h^m$ के गुणांकों की तुलना करने पर हमें सूत्र (2.10) की प्राप्ति होती है। इसी प्रकार सूत्र (2.9). (2.11), (2.12) को भी सिद्ध किया जा सकता है।

सूत्र (2.14) की उपपत्ति : दो-सूचक हरमाइट बहुपद के जनक-फलन (1.9) का उपयोग करने पर

$$\sum_{n=o}^{\infty}\sum_{m=o}^{\infty} \frac{Hn,m(x_1+---+x_p)t^n h^m}{n!m!} = \exp[2(x_1+---+x_p)(t+h)^2]$$

$$= \exp[2x_1(t+h)-(t-h)^2]\exp[2(x_2+x_3)(t-h)]$$

सूत्र $\exp(x)=\sum_{n=o}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ एवं पुनः सूत्र (1.9) का दाहिने ओर प्रयोग करने पर :

$$= \sum_{n=o}^{\infty}\sum_{m=o}^{\infty}\frac{Hn,m(x_1)t^n h^m}{n!m!}.\sum_{r=o}^{\infty}\frac{(2(x_2+x_3))^r(t+h)^r}{r!}$$

सूत्र $(a+x)^n=\sum_{r=o}^{n}\binom{n}{r}a^{n-r}x^r$,, का प्रयोग करने पर तथा जैसा (2.10) की उपपत्ति में किया है, करने पर हमें सूत्र (2.14) की प्राप्ति होती है।

इसी प्रकार सूत्र (2.13), (2.15), (2.16) को भी सिद्ध किया जा सकता है।

सूत्र (2.20) की उपपत्ति : p-सूचक हरमाइट बहुपद के जनक फलन (1.11) का उपयोग करने पर :

$$\sum_{n_1=o}^{\infty}\sum_{n_p=o}^{\infty}\frac{Hn_1,---,n_p(x_1+---+x_p)(\sqrt{2}t_1)^{n_1}---(\sqrt{2}t_p)^{n_p}}{n!---n_p!}$$

$$= \exp[2x_1+---+x_p(\sqrt{2}t_1+---+\sqrt{2}t_p)-(\sqrt{2}t_1+---+\sqrt{2}t_p)^2]$$

$$= \exp[2(\sqrt{2}x_1)(t_1+---+t_p)-(t_1+---+t_p)^2]$$

$$\exp\left[2(\sqrt{2}(x_2+---+x_p)-(t_1+---+t_p)(t_1+---+t_p)^2\right]$$

सूत्र (1.11) का पुनः प्रयोग करने पर

$$= \sum_{n_1=o}^{\infty}\sum_{n_p=o}^{\infty}\frac{Hn_1,---,n_p(\sqrt{2}x_1)t_1^{n_1}---t_p^{n_p}}{n!---n_p!}$$

$$\sum_{r_1=o}^{\infty}---\sum_{r_p=o}^{\infty}\frac{Hr_1,---,r_p)(\sqrt{2}(x_2+---+x_p)t_1^{r_1}---t_p^{n_p}}{r_1!---r_p}$$

दोनों ओर के $t_1^{r_1}---t_p^{n_p}$ के गुणांकों की तुलना करने पर हमें सूत्र (2.20) की प्राप्ति होती है। इसी प्रकार सूत्र (2.17) से (2.19) को सिद्ध किया जा सकता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक यू. जी. सी. (इंडिया) के प्रति आभार व्यक्त करता है।

निर्देश

1. रेनविले, ई. डी. : Special Functions, The Mcmillan Co. NY (1967).
2. श्रीवास्तव, एच. एस. पी. : Int. Trans. and Spec. Funct. 2000, 10, 1, 61-70.
3. श्रीवास्तव, एच. एस. पी. : (प्रकाशनाधीन)
4. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा दाओस्त, एम. सी. : Nedarl. Akad. Westensch. Indag. Math. 1969, 31, 449-457.
5. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा मनोचा, एच. एल. : A Treatise on Generating Functions, John Wiley and Sons, NY (1984).

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 3, July 2003

ज्या के कोणों एवं फाक्स H-फलन के प्राचल के गुणनफल के प्रति समाकलन

ए. के. रोंघे

गणित विभाग, एस. एस. एल. जैन महाविद्यालय, विदिशा (म. प्र.)

[प्राप्त - फरवरी 27,2003]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में ज्या के कोणों एवं फाक्स H-फलन के गुणनफलों के प्रति समाकलन कोण एवं प्राचल के प्रति किया गया है। नये परिणामों को उनकी विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त किया गया है।

Abstract

Integration for product of angle of SINE and w. r. t. parameter of Fox's H- function. *By* A.K. Ronghe, Department of Mathematics, S.S.L. Jain P.G. College, Vidisha (M.P.)

In this paper few integrals involving product of SINE and Fox's H-function have been integrated with respect to a parameter and angle of sine. Many new relations may be obtained as particular cases.

1. फाक्स [5] द्वारा प्रचारित H -फलन को हम निम्नांकित प्रकार से प्रदर्शित एवं परिभाषित करेंगे-

$$H_{p,q}^{m,n}\left[z\left|\begin{matrix}"ap.\alpha_p"\\ "b_q\beta_q"\end{matrix}\right.\right]=\frac{1}{2\pi i}\int_L \theta(s)z^s ds, \qquad (1.1)$$

जहाँ
$$Q(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(b_j-B_js)\prod_{j=i}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_js)}{\prod_{j=m+i}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_js)\prod_{j=n+1}^{p}(aj-\alpha_js)} \qquad (1.2)$$

जहाँ z शून्य के बराबर नहीं है तथा रिक्त गुणनफल को इकाई रूप में लिया गया है। m,

n, p और q पूर्णांक हैं. जिसमें $1 \le m \le q, o \le n \le p$ तुष्टि होती है, α_j β_j धन संख्याएँ हैं एवं प्राचल ऐसे हैं कि कोई पोल किसी पोल में संगमित नहीं है । कन्टूर $Re(s) = \sigma$ जो दाहिनी ओर स्थित पोल को बाईं ओर स्थित पोल से पृथक करता है।

जहाँ $K = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j + \sum_{j=1}^{m} \beta_j - \sum_{j=n+1}^{p} aj - \sum_{j=m+1}^{q} \beta_j,$ (1.3)

तब डिक्शन तथा फेरर [2] के परिणाम द्वारा समाकलन (1.1) परम अभिसारी ($K > 0$ के लिये) है बशर्ते $|\arg. z| < \frac{1}{2}\pi k$ और ($K < 0$)अपसारी लिया गया है। इस प्रपत्र में हम निम्नलिखित ज्ञात परिणाम [4] का प्रयोग करेंगे।

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(cx)dx}{\Gamma(\alpha+x)\Gamma(\beta-x)} = \frac{[2\cos(c/2)]^{\alpha+\beta-2}.\sin\left[\frac{1}{2}c(\beta-\alpha)\right]}{\Gamma(\alpha+\beta+1)}$$

जहाँ $Re(\alpha+\beta) < 1, 0 < c < \pi$ (1.4)

2. जिन समाकलनों का मान ज्ञात किया गया है वे हैं -

$$\int_{\infty}^{\infty} \sin cx H_{p,q+2}^{m,n}\left[z\Big|_{"b_j,B_j",(1-\alpha+x;u)(1-B-x:u)}^{"a_j,\alpha_j"}\right]dx,$$

$$= \sin\left[\frac{c}{2}(\beta-\alpha)\right] \quad \left[2\cos\frac{c}{2}\right]^{\alpha+\beta-2}$$

$$H_{p,q+1}^{m,n}\left[z(\cos\frac{c}{2})^{2u}\Big|_{"b_j,\beta_j",(2-\alpha-\beta;2u)}^{"a_j,\alpha_j"}\right]$$

बशर्ते कि $Re(\alpha+\beta+2u(\frac{b_j}{\beta_j})) > 2, j = 1,2\cdots m,$

$$0 < c < \pi, |\arg. z| < \frac{1}{2}\pi k, \quad (2.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin cx H_{p+2,q}^{m,n}\left[z\Big|_{(\alpha+x;u),(\beta-x;u),"b_j,\beta_j"}^{"a_j,\alpha_j"}\right]dx$$

$$= \sin\left[\frac{c}{2}(\beta-\alpha)\right]\left[(2\cos\frac{c}{2})\right]^{\alpha+\beta-2}$$

$$H^{m,n}_{p+1,q}\left[z(\cos\frac{c}{2})^{-2u}\left|\begin{matrix}"a_j\alpha_j" \\ (-1+\alpha+\beta;2u)"b_j,\beta_j"\end{matrix}\right.\right]$$

बशर्ते कि $\text{Re}\{(\alpha+\beta-2u(b_j/\beta_j)\}>2, j=1,2,\cdots m_1$

$$0<c<\pi, \quad |\arg z|<\frac{1}{2}\pi k, \tag{2.2}$$

उपपत्ति : (2.1) की स्थापना के लिये इसके वाम पक्ष के समाकलन में आये एक संमिश्र वाले फाक्स H-फलन को (1.2) के बल पर मेलिन-बार्नीज प्रकार के कंटूर समाकलन के रूप में व्यक्त करते हैं जो कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध और पूर्णतया अभिसारी है जिसमें हमें निम्नलिखित समाकलन की प्राप्ति होती है -

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \theta(s)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin cx\, z^s\ ds}{(\alpha+x+us)(\beta+x+us)}dx$$

अब (1.4) की सहायता से आन्तरिक समाकलन का मान निकालकर प्राप्त परिणाम की विवेचना (1.1) से करने पर (2.1) का दाहिना पक्ष प्राप्त होता है। इस प्रकार, परिणाम (2.2) को ज्ञात कर सकते हैं ।

3. अनुप्रयोग एवं विशिष्ट दशाएँ : इस भाग में परिणाम (2.1) की विशिष्ट दशाएँ ज्ञात करेंगे जिनका अनुप्रयोग भौतिक शास्त्र में अन्तरित विज्ञान के लिये एवं क्वाण्टम गुरुत्व की व्याख्या करने में प्रयोग किया जाता है।

(i) यदि (2.1) में एवं (2.2) में $C=\pi/2$ रखें तो निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होगा -

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2}xH^{m,n}_{p,q+2}\left[z\left|\begin{matrix}"a_j,\alpha_j" \\ "b_j,\beta_j",(1-\alpha+x;u),(1-\beta-x;u)\end{matrix}\right.\right]dx$$

$$=\sin\frac{\pi}{2}(\beta-\alpha)j(\sqrt{2})^{\alpha+\beta-2}.H^{m,n}_{p,q+1}\left[z(\sqrt{2})^{2u}\left|\begin{matrix}"a_j,\alpha_j" \\ "b_j,\beta_j",(2-\alpha-\beta;2u)\end{matrix}\right.\right]$$

बशर्ते कि $\text{Re}(\alpha+\beta+2u(b_j/\beta_j)>2, \quad j=1,2,3\cdots m,$

$$0<c<p, |\arg z|<\frac{1}{2}\pi k \tag{3.1}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2}xH^{m,n}_{p+2,q+0}\left[z\begin{matrix}"a_j,\alpha_j" \\ "b_j,\beta_j",(a+x;u)(\beta-x;u)\end{matrix}\right]dx$$

$$= \sin[\frac{\pi}{2}(\beta-\alpha)(\sqrt{2})^{\alpha+\beta-2} ; H^{m,n}_{p+1,q}\left[z(\sqrt{2})^{-2u} \middle| \begin{matrix} "a_j,\alpha_j" \\ (-1+\alpha+\beta;2u),(b_j,\beta_j) \end{matrix} \right]$$

बशर्ते कि $\mathrm{Re}(\alpha+\beta-2u(b_j/\beta_j)>2, \quad j=1,2,3\cdots m,$

$$0<c<\pi, |\arg z|<\frac{1}{2}\pi k \tag{3.2}$$

इसी प्रकार अन्य विशिष्ट दशाएँ ज्ञात की जा सकती हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक गणित विभाग के अध्यक्ष डा. आर. के. जैन का आभारी है जिन्होंने प्रपत्र तैयार करने में सुझाव दिये।

निर्देश

1. आनन्दानी, पी. तथा नाम प्रसाद : **विज्ञान परिषद अनु. पत्रिका** 1976,8,221-26
2. आनन्दानी, पी. तथा ए. के. रोंघे : **विज्ञान परिषद अनु. पत्रिका** 1982,30,13-16
3. डिक्शन, ए. एल. तथा फेरर, डब्ल्यू. ए. : क्वार्ट जर्न. मैथ. आक्सफोर्ड सीरीज 1936, 7, 81-96
4. एर्डेल्यी, ए. इत्यादि : H. T. F. Vol. 1 मैग्राहिल, न्यूयार्क 1954 पृष्ठ 216-19

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 3, July 2003

सान्त ${}_3\Phi_2(\cdot)$ श्रेणी के लिए कतिपय संकलन सूत्र

आर. के. यादव तथा बलराज सिंह

गणित तथा सांख्यिकी विभाग, जे. एन. वी. यूनिवर्सिटी
जोधपुर (राजस्थान)

[प्राप्त - नवम्बर 21, 2002]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य सान्त ${}_3\Phi_2$ $(\cdot)$ श्रेणी के लिए दो संकलन सूत्र प्राप्त करना है। प्राप्त परिणाम q- सालसुत्ज के प्रमेय से निकटतः सम्बन्धित है। मुख्य परिणामों के सम्प्रयोगों के रूप में ${}_2\Phi_1(\cdot)$ श्रेणी के लिए कतिपय रोचक संकलन एवं अरोरा तथा राठी [1] के ज्ञात परिणाम प्राप्त किये गये हैं।

Abstract

Certain summation formulae for the terminating ${}_3\Phi_2$ $(\cdot)$ series. *By* R.K. Yadav and Balraj Singh Department of Mathematics and Statistics, J.N.V. University, Jodhpur (Raj.).

The object of the present paper is to derive two summation formula for the terminating ${}_3\Phi_1(\cdot)$ series. The results are closely related to q-Saalschutz theorem. Some interesting summations for ${}_2\Phi_1(\cdot)$ series and known results due to Arora and Rathie [1] have been deduced as applications of the main results.

1. प्रस्तावना तथा अन्य प्रारम्भिक बातें

माना कि $|q| < 1, \neq 0$ तथा वास्तविक या संमिश्र 'a'

$$(a;q)_n = \begin{cases} 1 & ;n=0 \\ (1-a)(1-aq)\ldots(1-aq^{n-1}) & ;n=1,2\ldots \end{cases} \tag{1.1}$$

$$ {}_A\Phi_B\left[\begin{matrix} a_1,\ldots,a_A; \\ b_1,\ldots,b_B; \end{matrix} q,z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1;q)_n \ldots (a_A;q)_n z^n}{(q;q)_n (b_1;q)_n \ldots (b_B;q)_n} \left\{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\right\}^{1+B-A} \quad (1.2) $$

जहाँ $q^{\binom{n}{2}} = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad |z|<1$

q-सालसुत्सियन प्रमेय को निम्नवत् परिभाषित करते हैं। तुलनार्थ गैस्पर तथा रहमान[2]

$$ {}_3\Phi_2\left[\begin{matrix} q^a,q^b,q^{-n} & ; \\ q^c,q^{1+a+b-n-c} & ; \end{matrix} q,q\right] = \frac{\left(q^{c-a},q^{c-b};q\right)_n}{\left(q^c,q^{c-a-b};q\right)_n} \quad (1.3) $$

2. मुख्य परिणाम

इस अनुभाग में सान्त ${}_3\Phi_2\,(\cdot)$ श्रेणी के लिए निम्नांकित दो संकलन सूत्र स्थापित किये जावेंगे।

$$ {}_3\Phi_2\left[\begin{matrix} q^a,q^b,q^{-n} & ; \\ q^c,q^{2+a+b-n-c} & ; \end{matrix} q,q\right] $$

$$ = \frac{q^b(1-q^a)(q^{c-a-1},q^{c-b};q)_n - q^a(1-q^b)(q^{c-b-1},q^{c-a};q)_n}{(q^b-q^a)(q^c,q^{c-a-b-1};q)_n} \quad (2.1) $$

$$ {}_3\Phi_2\left[\begin{matrix} q^a,q^b,q^{-n} & ; \\ q^c,q^{3+a+b-n-c} & ; \end{matrix} q,q\right] $$

$$ = \sum_{a\leftrightarrow b} \frac{q^{2b}(1-q^a)(1-q^{a+1})(q^{c-a-2},q^{c-b};q)_n}{(q^b-q^a)(q^b-q^{1+a})(q^c,q^{c-a-b-2};q)_n} $$

$$ + \frac{q^{a+b+1}(1+q)(1-q^a)(1-q^b)(q^{c-a-1},q^{c-b-1};q)_n}{(q^b-q^{a+1})(q^a-q^{b+1})(q^c,q^{c-a-b-2};q)_n} $$

जहाँ $\sum_{a\leftrightarrow b} f(a,b) = f(a,b) + f(b,a) \quad (2.3)$

उपपत्ति : (2.1) को सिद्ध करने के लिए हम निम्नांकित पुनरावृत्ति सम्बन्ध से प्रारम्भ करेंगे जिसमें ${}_3\Phi_2\,(\cdot)$ श्रेणी निहित है -

$$ q^b(1-q^a)\,{}_3\Phi_2\left[\begin{matrix} q^{a+1},q^b,q^{-n} & ; \\ q^c,q^{2+a+b-n-c} & ; \end{matrix} q,q\right] - q^a(1-q^b)\,{}_3\Phi_2\left[\begin{matrix} q^a,q^{b+1},q^{-n} & ; \\ q^c,q^{2+a+b-n-c} & ; \end{matrix} q,q\right] $$

$$= (q^b - q^a)\,{}_3\Phi_2\left[\begin{matrix} q^a, q^b, q^{-n} & ; \\ q^c, q^{2+a+b-n-c} & ; \end{matrix} q, q\right] \tag{2.4}$$

उपर्युक्त पुनरावृत्ति सम्बन्ध को आसानी से सिद्ध किया जा सकता है यदि हम वाम पक्ष को लें और (1.1) तथा (1.2) का उपयोग करते हुए आगे भी सिद्ध करें।

(1.3) की सहायता से (2.4) को वामपक्ष में दो सालसुत्सियन श्रेणियों $_3\Phi_2(\cdot)$ के संकलन से तथा और भी आगे सरलीकरण से हमें (2.1) का दक्षिण पक्ष प्राप्त होता है।

(2.2) की उपपत्ति निम्नांकित सम्बन्धों के उपयोग पर आधारित है जिनमें $_3\Phi_2(\cdot)$ श्रेणी निहित है अर्थात्

$$q^b(1-q^a)\,{}_3\Phi_2\left[\begin{matrix} q^{a+1}, q^b, q^{-n} & ; \\ q^c, q^{3+a+b-n-c} & ; \end{matrix} q, q\right] - q^a(1-q^b)\,{}_3\Phi_2\left[\begin{matrix} q^a, q^{b+1}, q^{-n} & ; \\ q^c, q^{3+a+b-n-c} & ; \end{matrix} q, q\right]$$
$$= (q^b - q^a)\,{}_3\Phi_2\left[\begin{matrix} q^a, q^b, q^{-n} & ; \\ q^c, q^{3+a+b-n-c} & ; \end{matrix} q, q\right] \tag{2.5}$$

$$q^b(1-q^{a+1})\,{}_3\Phi_2\left[\begin{matrix} q^{a+2}, q^b, q^{-n} & ; \\ q^c, q^{3+a+b-n-c} & ; \end{matrix} q, q\right] - q^{a+1}(1-q^b)\,{}_3\Phi_2\left[\begin{matrix} q^{a+1}, q^{b+1}, q^{-n} & ; \\ q^c, q^{3+a+b-n-c} & ; \end{matrix} q, q\right]$$
$$= (q^b - q^{a+1})\,{}_3\Phi_2\left[\begin{matrix} q^{a+1}, q^b, q^{-n} & ; \\ q^c, q^{3+a+b-n-c} & ; \end{matrix} q, q\right] \tag{2.6}$$

तथा

$$q^a(1-q^{b+1})\,{}_3\Phi_2\left[\begin{matrix} q^a, q^{b+2}, q^{-n} & ; \\ q^c, q^{3+a+b-n-c} & ; \end{matrix} q, q\right] - q^{b+1}(1-q^a)\,{}_3\Phi_2\left[\begin{matrix} q^{a+1}, q^{b+1}, q^{-n} & ; \\ q^c, q^{3+a+b-n-c} & ; \end{matrix} q, q\right]$$
$$= (q^a - q^{b+1})\,{}_3\Phi_2\left[\begin{matrix} q^a, q^{b+1}, q^{-n} & ; \\ q^c, q^{3+a+b-n-c} & ; \end{matrix} q, q\right] \tag{2.7}$$

(1.1), (1.2) तथा (2.4) को ध्यान में रखकर हम (2.5) से (2.7) तक के उपर्युक्त पुनरावृत्ति सम्बन्धों को सरलता से सिद्ध कर सकते हैं।

(2.5) के वाम पक्ष में (2.6) तथा (2.7) से $_3\Phi_2(\cdot)$ के मान का उपयोग करके तथा

(1.3) की सहायता से प्राप्त सालसुत्सियन श्रेणी ${}_3\Phi_2(\cdot)$ का संकलन करने पर हमें और आगे सरलीकरण के पश्चात् (2.2) का दक्षिण पक्ष प्राप्त होता है।

3. सम्प्रयोग

इस अनुभाग में हम निम्नांकित परिणामों को (2.1) तथा (2.2) के सम्प्रयोगों के रूप में प्राप्त करेंगे।

यदि हम (2.1) में $q \rightarrow$ लें तथा सम्बन्ध

$$\lim_{q\to 1}\left\{\frac{(a;q)_n}{(1-q)^n}\right\}=(a)_n, \tag{3.1}$$

का उपयोग करें तो इससे

$${}_3F_2\left[\begin{matrix} a,b,-n & ; \\ c,2+a+b-n-c; \end{matrix} 1\right]=\frac{a(c-a-1)_n(c-b)_n-b(c-a)_n(c-b-1)_n}{(a-b)(c)_n(c-a-b-1)_n} \tag{3.2}$$

प्राप्त होता है जो कि अरोरा तथा राठी [1,eqn (1.1)] का ज्ञात परिणाम है। इसके बाद यदि (2.2) में $q \rightarrow$ लें और (3.1) का उपयोग करें तो हमें एक और ज्ञात परिणाम प्राप्त होगा |अरोरा तथा राठी [1,eqn (1.2)] अर्थात्

$${}_3F_2\left[\begin{matrix} a,b,-n & ; \\ c,3+a+b-n-c; \end{matrix} 1\right]$$

$$=\sum_{a\leftrightarrow b}\frac{a(a+1)(c-a-2)_n(c-b)_n}{(a-b)(a+1-b)(c)_n(c-a-b-2)_n}+\frac{2ab(c-a-1)_n(c-b-1)_n}{(c)_n(a+1-b)(b+1-a)(c-a-b-2)_n} \tag{3.3}$$

जहाँ $\sum_{a\leftrightarrow b} f(a,b) = f(a,b)+f(b,a)$

पुनः यदि हम (2.1) में $n \rightarrow \infty$ रखें तो हमें गासियन ${}_2\Phi_1(\cdot)$ श्रेणी के लिए निम्नांकित रोचक संकलन सूत्र प्राप्त होता है -

$${}_2\Phi_1\left[\begin{matrix} q^a,q^b & ; \\ q^c & ; \end{matrix} q,q^{c-a-b-1}\right]$$

$$=\frac{q^b(1-q^a)(q^{c-a-1},q^{c-b};q)_\infty-q^a(1-q^b)(q^{c-b-1},q^{c-a};q)_\infty}{(q^b-q^a)(q^c,q^{c-a-b-1};q)_\infty} \tag{3.4}$$

इसके आगे यदि हम (2.2) में $n \to \infty$ रखें तो हमें आधार गॉस श्रेणी के लिए एक अन्य संकलन सूत्र प्राप्त होता है -

$$ {}_2\Phi_1\left[\begin{matrix} q^a, q^b & ; \\ q^c & ; \end{matrix} q, q^{c-a-b-2}\right] $$

$$ = \sum_{a \leftrightarrow b} \frac{q^{2b}(1-q^a)(1-q^{a+1})(q^{c-a-2}, q^{c-b}; q)_\infty}{(q^b - q^a)(q^b - q^{a+1})(q^c, q^{c-a-b-2}; q)_\infty} $$

$$ + \frac{q^{a+b+1}(1+q)(1-q^a)(1-q^b)(q^{c-a-1}, q^{c-b-1}; q)_\infty}{(q^b - q^{a+1})(q^a - q^{b+1})(q^c, q^{c-a-b-2}; q)_\infty} \tag{3.5} $$

अंत में यदि (2.1) तथा (2.2) में $n \to \infty$ रखें तो हमें सान्त $_2\Phi_2(\cdot)$ श्रेणी के लिए निम्नांकित रोचक सूत्र प्राप्त होते हैं।

$$ {}_2\Phi_2\left[\begin{matrix} q^b, q^{-n} & ; \\ q^c, q^{2+b-n-c} & ; \end{matrix} q, q\right] = 1 \tag{3.6} $$

तथा
$$ {}_2\Phi_2\left[\begin{matrix} q^b, q^{-n} & ; \\ q^c, q^{3+b-n-c} & ; \end{matrix} q, q\right] = 1 \tag{3.7} $$

(3.4) से (3.7) तक के परिणाम नवीन प्रतीत होते हैं। यह रोचक बात है कि $_A\Phi_B(\cdot)$ श्रेणी में निहित प्राचल के उपयुक्त विशिष्टीकरण से $_A\Phi_B(z)$ श्रेणी से सम्बद्ध अनेक संकलन सूत्र प्राप्त किये जा सकते हैं ।

निर्देश

1. अरोरा, के. तथा राठी, ए. के. : The Mathematics Education, 1994, 28(2), 111-112.
2. गैस्पर जी. तथा रहमान, एम. : Basic Hypergeonmetric Series,Combridge Univ.Press, (1990).
3. रेलविले, ई. डी. : Special Functions, Chelses Publishing Comp., New York (1960).
4. स्लेटर, एल. जे. : Generalized Hypergeometric Functions, Cambridge Univ.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 3, July 2003

सामान्य बहुगुण यूलेरी समाकल तथा आंशिक समाकलन

एस. पी. गोयल तथा त्रिलोक माथुर

गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर (राजस्थान)

[प्राप्त - मई 28, 2001]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य दो सामान्य बहुगुण यूलेरी समाकलों का मान ज्ञात करना है, जो दो सामान्य समाकल्यों वाले हैं और जिनमें बहुचर H-फलन तथा सामान्य आर्गुमेंट वाले सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन का गुणनफल निहित है। इन समाकलों की विशिष्ट दशाएं भी दी गई हैं।

Abstract

On general multiple Eulerian integrals and fractional integration. *By* S.P. Goyal and Trilok Mathur, Department of Mathmatics, University of Rajasthan, Jaipur (Raj.)

The object of the present paper is first to evaluate two general multiple Eulerian integrals with general integrands involving the product of a multivariable H-function and generalized hypergeometric function with general arguments. Our integral formulas are interesting and unified in nature. These integrals extend several known and new results. Special cases of these integrals (which are also sufficiently general in nature and are of interest in themselves) have also been given. We have also expressed our integral formulas as Riemann-Liouville fractional integral of product of aforementioned functions which would provide useful generalization of known or new results in the theory of fractional calculus.

1. प्रस्तावना

इस प्रपत्र में आये बहुचर H- फलन को श्रीवास्तव तथा पण्डा [16] ने परिभाषित किया है। इस प्रपत्र में इस फलन के प्राचलों को निम्नांकित संक्षिप्त रूप में 14,p. 251, Eq.(C.I)

$$H[z_1 \ldots z_r] =$$

$$H^{0,N:M_1,N_1;\ldots;M_r,N_r}_{P,Q:P_1,Q_1;\ldots;P_r,Q_r}\left[\begin{matrix} z_1 \\ \vdots \\ z_r \end{matrix}\left| \begin{matrix} (a_j;A_j',\ldots,A_j^{(r)})_{1,p}:(c_j',E_j')_{1,p_1};\ldots;(c_j^{(r)},E_j^{(r)})_{1,p_r} \\ (b_j;B_j',\ldots,B_j^{(r)})_{1,Q_1}:(f_j',F_j')_{1,Q_1};\ldots;(f_j^{(r)},F_j^{(r)})_{1,Q_r} \end{matrix}\right.\right] \quad (1.1)$$

प्रदर्शित किया जावेगा। विस्तृत विवरण पुस्तक [14] में देखा जा सकता है। इस प्रपत्र में यह मान लिया गया है कि यह फलन इस पुस्तक में उल्लिखित प्रतिबन्धों की तुष्टि करता है।

हमें सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय श्रेणी (See, e.q. [9, p. 99, Eq (1.2)]) के लिए निम्नांकित बहुगुण समाकल निरूपण की आवश्यकता होगी -

$${}_RF_S[(c_R);(d_S);-(x_1+\ldots+x_l)]$$

$$= \frac{1}{(2\pi\omega)^l}\int_{L_1}\cdots\int_{L_l} \frac{\prod_{j=1}^{R}\Gamma(c_j+s_1+\ldots+s_l)\prod_{j=1}^{S}\Gamma(d_j)}{\prod_{j=1}^{S}\Gamma(d_j+s_1+\ldots+s_l)\prod_{j=1}^{R}\Gamma(c_j)}\prod_{k=1}^{l}\left\{\Gamma(-s_k)(x_k^{s_k})ds_k\right\}$$

(1.2)

जहाँ $\omega = \sqrt{-1}$ तथा यदि आवश्यक हुआ तो दंतुरताओं सहित बार्नीज प्रकार के कंटूर जहाँ $\Gamma(c_j+s_1+\ldots+s_l)$ के पोल $\Gamma(-s_k)(k=1,\ldots,l)$ के पोलों से विलगित हैं।

2. मुख्य समाकल सूत्र

सुविदित यूलरी बीटा समाकल का समतुल्य रूप

$$\int_a^b (t-a)^{\alpha-1}(b-t)^{\beta-1}dt = (b-a)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta) \quad (2.1)$$

$$(Re(\alpha)>0, Re(\beta)>0, a \neq b)$$

मूलभूत परिणाम है जिससे अन्य अनेक उपयोगी सामकल जिनमें विविध फलन निहित हैं, निकाले जा सकते हैं। कई शोधकर्ताओं ने [2-5,8-11,15,1] अनेक बहुपदों तथा एक से अधिक चरों वाले H-फलन वाले अनेक यूलरी समाकलों को स्थापित किया है। उनके कार्य से प्रेरित होकर हम इस प्रमेय में ऐसे दो सामान्य बहुगुण यूलरी समाकलों का मान निकालेंगे जिनके समाकल्य में बहुचर H-फलन तथा सामान्य आर्गुमेन्ट वाले सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन का गुणनफल निहित है।

प्रथम समाकल

$$\int_{u_1}^{v_1}\cdots\int_{u_s}^{v_s}\prod_{i=1}^{s}\left\{(x_i-u_i)^{\alpha_i-1}(v_i-x_i)^{\beta_i-1}\prod_{j=1}^{T}(u_i^{(j)}x_i+v_i^{(j)})\sigma_i^{j}\right\}$$

$$\times H\left[z_1\prod_{i=1}^{s}\left\{\frac{(x_i-u_i)^{\delta_i'}(v_i-x_i)^{\eta_i'}}{\prod_{j=1}^{T}(U_i^{(j)}x_i+V_i^{(j)})^{\rho_i^{(j,1)}}}\right\},\ldots,z_r\prod_{i=1}^{s}\left\{\frac{(x_i-u_i)^{\delta_i^{(r)}}(v_i-x_i)^{\eta_i^{(r)}}}{\prod_{j=1}^{T}(U_i^{(j)}x_i+V_i^{(j)})^{\rho_i^{(j,r)}}}\right\}\right]$$

$$\times\ {}_RF_S\left[(c_R);(d_S);-\sum_{k=1}^{l}gk\sum_{i=1}^{s}\left\{\frac{(x_i-u_i)^{u_i^{(k)}}(v_i-x_i)^{\eta_i^{(r)}}}{\prod_{j=1}^{T}\left(U_i^{(j)}x_i+V_i^{(j)}\right)^{\tau_i^{(j,k)}}}\right\}\right]dx_1\ldots dx_s$$

$$=\frac{\prod_{j=1}^{S}\Gamma(d_j)}{\prod_{j=1}^{R}\Gamma(c_j)}\prod_{i=1}^{s}\left\{(v_i-u_i)^{\alpha_i+\beta_i-1}\prod_{j=1}^{W}(u_iU_i^{(j)}+V_i^{(j)})^{\sigma_i^{(j)}}\prod_{j=W+1}^{T}(v_iU_i^{(j)}+V_i^{(j)})^{\sigma_i^{(j)}}\right\}$$

$$\times H^{0,N+sT+R+2s\ :I;I^*}_{p+sT+R+2s,Q+sT+S+s:j;j^*}\left[\begin{matrix}z_1w_1\\ \vdots\\ z_rw_r\\ g_1w_1'\\ \vdots\\ g_\int w_\int'\\ G_1\\ \vdots\\ G_T\end{matrix}\left|\begin{matrix}A^*:C^*;\ \underbrace{-;\ldots;-}_{\int+T}\\ B^*:D^*;\underbrace{(0,1);\ldots;(0,1)}_{\int+T}\end{matrix}\right.\right] \qquad (2.2)$$

जहाँ

$$w_m = \prod_{i=1}^{s}\left\{(v_i - u_i)^{\delta_i^{(m)}+\eta_i^{(m)}} \prod_{j=1}^{W}(u_i U_i^{(j)} + V_i^{(j)})^{-\rho_i^{(j,m)}} \prod_{j=W+1}^{T}(v_i U_i^{(j)} + V_i^{(j)})^{-\rho_i^{(j,m)}}\right\} \quad (2.3)$$

$$(m = 1,...,r)$$

$$w'_k = \prod_{i=1}^{s}\left\{(v_i - u_i)^{\mu_i^{(k)}+\theta_i^{(k)}} \prod_{j=1}^{W}(u_i U_i^{(j)} + V_i^{(j)})^{-\tau_i^{(j,k)}} \prod_{j=W+1}^{T}(v_i U_i^{(j)} + V_i^{(j)})^{-\tau_i^{(j,k)}}\right\} \quad (2.4)$$

$$(k = 1,...,l)$$

$$G_j = \prod_{i=1}^{s}\left\{\frac{(v_i - u_i)U_i^{(j)}}{(u_i U_i^{(j)} + V_i^{(j)})}\right\} \qquad (j = 1,\ldots,W) \qquad (2.5)$$

$$G_j = -\prod_{i=1}^{s}\left\{\frac{(v_i - u_i)U_i^{(j)}}{(u_i U_i^{(j)} + V_i^{(j)})}\right\} \qquad (j = W+1,\ldots,T) \qquad (2.6)$$

$$A^* \equiv \left(1+\sigma'_i;\rho_i^{(1,1)},\ldots,\rho_i^{(1,r)},\tau_i^{(1,1)},\ldots,\tau_i^{(1,l)},1,\underbrace{0,\ldots,0}_{T-1}\right)_{1,s},$$

$$\ldots,\left(1+\sigma_i^{(T)};\rho_i^{(T,1)},\ldots,\rho_i^{(T,r)};\tau_i^{(T,1)},\ldots,\tau_i^{(T,l)};\underbrace{0,\ldots,0}_{T-1}\right)_{1,s},$$

$$(1-c_j;\underbrace{0,\ldots0}_{r},\underbrace{1,\ldots,1}_{l},\underbrace{0,\ldots,0}_{T},)_{1,R},$$

$$\left(1-\alpha_i;\delta'_i,\ldots,\delta_i^{(r)},\mu'_i,\ldots,\mu_i^{(l)},\underbrace{1,\ldots,1}_{W},\underbrace{0,\ldots,0}_{T-W}\right)_{1,s},$$

$$\left(1-\beta_i;\eta_i',\ldots,\eta_i^{(r)},\theta_i',\ldots,\theta_i^{(\int)},\underbrace{0,\ldots,0}_{W},\underbrace{1,\ldots,1}_{T-W}\right)_{1,s},$$

$$\left(a_j;A_j',\ldots,A_j^{(r)},\underbrace{0,\ldots,0}_{\int+T}\right)_{1,p} \quad (2.7)$$

$$B^* \equiv \left(b_j;B_j',\ldots,B_j^{(r)},\underbrace{0,\ldots,0}_{\int+T}\right)_{1,Q},$$

$$\left(1+\sigma_j';\rho_i^{(1,1)},\ldots,\rho_i^{(1,r)},\tau_i^{(1,1)},\ldots,\tau_i^{(1,\int)},\underbrace{0,\ldots,0}_{T}\right)_{1,s},$$

$$\ldots,\left(1+\sigma_j^{(T)};\rho_i^{(T,1)},\ldots,\rho_i^{(T,r)},\tau_i^{(T,1)},\ldots,\tau_i^{(T,\int)},\underbrace{0,\ldots,0}_{T}\right)_{1,s},$$

$$(1-d_j,\underbrace{0,\ldots,0}_{r},\underbrace{1,\ldots,1}_{\int},\underbrace{0,\ldots,0}_{T})_{1,s},$$

$$\left(1-\alpha_i-\beta_i;(\delta_i'+\eta_i'),\ldots,(\delta_i^{(r)}+\eta_i^{(r)}),(\mu_i'+\theta_i'),\ldots,(\mu_i^{(\int)}+\theta_i^{(\int)}),\underbrace{1,\ldots,1}_{T}\right)_{1,s} \quad (2.8)$$

$$C^* \equiv (e_j',E_j')_{1,p_1};\ldots;(e_j^{(r)},E_j^{(r)})_{1,p_r} \quad (2.9)$$

$$D^* \equiv (f_j',F_j')_{1,Q_1};\ldots;(f_j^{(r)},F_j^{(r)})_{1,Q_r} \quad (2.10)$$

$$I \equiv M_1,N_1;\ldots;M_r,N_r \quad (2.11)$$

$$J \equiv P_1,Q_1;\ldots;P_r,Q_r \quad (2.12)$$

$$I^* \equiv \underbrace{1,0;\ldots;1,0}_{\int+T} \tag{2.13}$$

$$J^* \equiv \underbrace{1,0;\ldots;1,0}_{\int+T} \tag{2.14}$$

(2.2) में W एवं T पूर्णांकों से असमिका $() \le W \le T$ तुष्ट होती है। समाकल (2.2) का अस्तित्व निम्नांकित प्रतिबन्ध समूहों के साथ होता है।

(i) $u_i, v_i \in R \quad (u_i < v_i)$

तथा $\min\{\delta_i^{(t)}, \eta_i^{(t)}, \rho_i^{(j,t)}, \mu_i^{(k)}, \theta_i^{(k)}, \tau_i^{(j,k)}\} \ge 0$

(j = 1, ...,T; i = 1,...,s; k = 1,...,l; t = 1,...r)

$\sigma_i^{(j)} \in R, U_i^{(j)}, V_i^{(j)} \in C, z_t, g_k \in C$

(j = 1, ...,s; t = 1,...,r ; k = 1,...,l; j = 1,...T)

(ii) $\max\limits_{\substack{1 \le i \le s \\ 1 \le j \le W}} \left\{\left|(v_i - u_i)U_i^{(j)} / (u_i U_i^{(j)} + V_i^{(j)}\right|\right\} \langle 1$

तथा

$\max\limits_{\substack{1 \le i \le s \\ W+1 \le j \le T}} \left\{\left|(v_i - u_i)U_i^{(j)} / (u_i U_i^{(j)} + V_i^{(j)}\right|\right\} \langle 1$

(iii) (a) $X^{(t)} = \sum_{j=1}^{p} A_j^{(t)} - \sum_{j=1}^{Q} B_j^{(t)} + \sum_{j=1}^{P_t} E_j^{(t)} - \sum_{j=1}^{Q_t} F_j^{(t)} \le 0$

(t = 1,...,r)

(b) $\Omega_i^{(t)} = \sum_{j=N+1}^{P} A_j^{(t)} - \sum_{j=1}^{Q} B_j^{(t)} + \sum_{j=1}^{N_t} E_j^{(t)} - \sum_{j=N_t+1}^{P_t} E_j^{(t)} + \sum_{j=1}^{M_t} F_j^{(t)}$

$- \sum_{j=M_t+1}^{Q_t} F_j^{(t)} - \delta_i^{(t)} - \eta_i^{(t)} - \sum_{j=1}^{T} \rho_i^{(j,t)} \rangle 0$

$(t = 1,...,r;\ i = 1,...s)$

(iv) $\left| \arg\left[z_1 \prod_{j=1}^{T} (U_i^{(j)} x_i + V_i^{(j)})^{-\rho_i^{(j,t)}} \right] \right| \langle \frac{1}{2} \pi \Omega_i^{(t)}$

(v) $R \leq S+1$ समिका तभी सत्य होती है जब इसके अतिरिक्त

या तो

$R \langle S \text{ and} \sum_{k=1}^{l} \left| gk \prod_{j=1}^{T} (U_i^{(j)} x_i + V_i^{(j)})^{-\tau_i^{(j,k)}} \right|^{\frac{1}{S-R}} \langle 1$

$(u_i \leq x_i \leq v_i;\ i = 1,...s)$

अथवा

$R \leq S \text{ and} \max_{1 \leq k \leq l} \left| gk \prod_{j=1}^{T} (U_i^{(j)} x_i + V_i^{(j)})^{-\tau_i^{(j,k)}} \right| \langle 1$

$(u_i \leq x_i \leq v_i;\ i = 1,...s)$

(vi) (a) $\text{Re}(\alpha_i) + \prod_{t=1}^{r} \partial_i^{(t)} \Lambda_t > 0 \qquad (i = 1,....,s)$

(b) $\text{Re}(\beta_i) + \prod_{t=1}^{r} \eta_i^{(t)} \Lambda_t > 0 \qquad (i = 1,....,s)$

जहाँ $\Lambda_t = \min_{1 \leq j \leq M_1} \text{Re}\left[f_j^{(t)} / F_j^{(t)} \right]$

द्वितीय समाकल

$$\int_{u_1}^{v_1}\cdots\int_{u_s}^{v_s}\prod_{i=1}^{s}\left\{(x_i-u_i)^{\alpha_i-1}(v_i-x_i)^{\beta_i-1}\prod_{j=1}^{T}(U_i^{(j)}x_i+V_i^{(j)})^{\sigma_i^{(j)}}\right\}$$

$$\times H^*\left[z_1\prod_{i=1}^{s}\left\{\frac{(x_i-u_i)^{\alpha_i^{(r)}}(v_i-x_i)^{\eta_i^{(r)}}}{\prod_{j=1}^{T}(U_i^{(j)}x_i+V_i^{(j)})^{\rho_i^{(j)}}}\right\},\ldots,z_r\prod_{i=1}^{s}\left\{\frac{(x_i-u_i)^{\alpha_i^{(r)}}(v_i-x_i)^{\eta_i^{(r)}}}{\prod_{j=1}^{T}(U_i^{(j)}x_i+V_i^{(j)})^{\rho_i^{(j,r)}}}\right\}\right]$$

$$\times {}_rF_s\left[(c_R);(d_s);-\sum_{k=1}^{t}gk\prod_{i=1}^{s}\left\{\frac{(x_i-u_i)^{\mu_i^{(k)}}(v_i-x_i)^{0_i^{(k)}}}{\prod_{j=1}^{T}(U_i^{(j)}x_i+V_i^{(j)})^{\tau_i^{(j,k)}}}\right\}\right]dx_1\ldots dx_s$$

$$=\frac{\prod_{j=i}^{S}\Gamma(d_j)}{\prod_{j=i}^{R}\Gamma(c_j)}\prod_{i=1}^{s}\left\{(v_i-u_i)^{\alpha_i+\beta_i-1}\prod_{j=1}^{W}(u_iU_i^{(j)}+V_i^{(j)})^{\sigma_i^{(j)}}\prod_{j\ W+1}^{T}(v_iU_i^{(j)}+V_i^{(j)})^{\sigma_i^{(j)}}\right\}$$

$$\times H^{0,\ \ R+sT+R+2s\ :I;I^*}_{()+R+sT+2s,P+S+sT+s:j;j^*}\left[\begin{matrix}z_1w_1\\ \vdots\\ z_rw_r\\ g_1w_1'\\ \vdots\\ g_tw_t'\\ G_1\\ \vdots\\ G_T\end{matrix}\left|\begin{matrix}A^{**}:C^{**};\underbrace{-;\ldots;-}_{\int+T}\\ B^{**}:D^{**};\underbrace{(0,1);\ldots;(0,1)}_{\int+T}\end{matrix}\right.\right]$$

जहाँ $H^*[z_1 \dots z_r] = H[z_1 \dots z_r]_{N=0}$ (2.16)

$w_m (m = 1, \dots r)$, w'_k $(k = 1, \dots, l)$, G_j $(j = 1, \dots T)$ तथा I^* J^* वही है जैसा कि क्रमशः (2.3) से (2.5),(2.13) तथा (2.14) समीकरणों से परिभाषित हैं।

$$A^{**} \equiv \left(1+\sigma_i';\rho_i^{(1,1)},\dots,\rho_i^{(1,r)},\tau_i^{(1,1)},\dots,\tau_i^{(1,l)},1,\underbrace{0,\dots,0}_{T-1}\right)_{1,s},$$

$$\dots,\left(1+\sigma_i^{(T)};\rho_i^{(T,1)},\dots,\rho_i^{(T,r)};\tau_i^{(T,1)},\dots,\tau_i^{(T,l)};\underbrace{0,\dots,0}_{T-1}\right)_{1,s},$$

$$(1-c_j;\underbrace{0,\dots,0}_{r},\underbrace{1,\dots,1}_{l},\underbrace{0,\dots,0}_{T},)_{1,R},$$

$$\left(1-\alpha_i;\delta_i',\dots,\delta_i^{(r)},\mu_i',\dots,\mu_i^{(l)},\underbrace{1,\dots,1}_{W}\underbrace{0,\dots,0}_{T-W}\right)_{1,s},$$

$$\left(1-\beta_i;\eta_i',\dots,\eta_i^{(r)},\theta_i',\dots,\theta_i^{(l)},\underbrace{0,\dots,0}_{W}\underbrace{1,\dots,1}_{T-W}\right)_{1,s},$$

$$\left(1-b_j;B_j',\dots,B_j^{(r)},\underbrace{0,\dots,0}_{l+T}\right)_{1,Q} \quad (2.17)$$

$$B^{**} \equiv \left(1-a_j;A_j',\dots,A_j^{(r)},\underbrace{0,\dots,0}_{l+T}\right)_{1,p}$$

$$\left(1+\sigma_i';\rho_i^{(1,1)},\dots,\rho_i^{(1,r)},\tau_i^{(1,1)},\dots,\tau_i^{(1,l)},\underbrace{0,\dots,0}_{T}\right)_{1,s},$$

$$\ldots,\left(1+\sigma_i^{(T)};\rho_i^{(T,1)},\ldots,\rho_i^{(T,r)};\tau_i^{(T,1)},\ldots,\tau_i^{(T,\int)};\underbrace{0,\ldots,0}_{T-1}\right)_{1,s},$$

$$(1-d_j;\underbrace{0,\ldots,0}_{r},\underbrace{1,\ldots,1}_{\int},\underbrace{0,\ldots,0}_{T},)_{1,s},$$

$$\left(1-\alpha_i-\beta_i;(\delta_i'+\eta_i'),\ldots,(\delta_i^{(r)}+\eta_i^{(r)}),\mu_i'+\theta_i'),\ldots,\mu_i^{(\int)}+\theta_i^{(l)}),\underbrace{1,\ldots,1,}_{T}\right)_{1,s}, \quad (2.18)$$

$$C^{**}\equiv(1-f_j',F_j')_{1,Q_1};\ldots;(1-f_j^{(r)},F_j^{(r)})_{1,Q_r} \quad (2.19)$$

$$D^{**}\equiv(1-e_j',E_j')_{1,P_1};\ldots;(1-e_j^{(r)},F_j^{(r)})_{1,P_r} \quad (2.20)$$

$$I^{**}\equiv N_1,\ M_1;\ldots\ ;\ N_r,\ M_r \quad (2.21)$$

$$J^{**}\equiv Q_1,\ P_1;\ldots\ ;\ Q_r,\ P_r \quad (2.22)$$

(2.15) में W तथा T पूर्णांक असमिका को $1\le W\le T$ तुष्ट करते हैं। समाकल (2.15) वैध है यदि

(i) प्रथम समाकल के साथ उल्लिखित (i) से लेकर (v) तक के प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं।

(ii) $\mathrm{Re}(\alpha_i)+\sum_{t=1}^{r}\delta_i^{(t)}\Lambda_t'>0 \qquad (i=1,\ldots,s)$

तथा (b) $\mathrm{Re}(\beta_i)+\sum_{t=1}^{r}\eta_i^{(t)}\Lambda_t'>0 \qquad (i=1,\ldots,s)$

जहाँ $\Lambda_t'=\max_{1\le j\le N_1}\mathrm{Re}\left[(e_j^{(t)}-1/E_j^{(t)}\right]$

उपपत्ति

समाकल (2.2) को स्थापित करने के लिए हम सर्वप्रथम कंटूर निरूपण [14,p.

251, Eq.(C.I)] का उपयोग बहुचर फलन के लिए तथा (1.2) का उपयोग इसके वाम पक्ष में आये सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन के लिए करते हैं। तत्पश्चात् समकलनों के क्रम को परस्पर विनिमय करते हैं और लिखते हैं -

$$\prod_{j=1}^{T}(U_i^{(j)}+V_i^{(j)})^{K_i^{(j)}}=\prod_{j=1}^{W}(U_i^{(j)}x_i+l_i^{\prime(j)})^{K_i^{(j)}}\prod_{j=W+1}^{T}(U_i^{(j)}x_i+V_i^{(j)})^{K_i^{(j)}} \quad (2.23)$$

जहाँ $K_i^{(j)}=\eta_i^{(j)}-\sum_{t=1}^{r}P_i^{(j,t)}\xi_t-\sum_{k=1}^{l}\tau_i^{(j,k)}\xi_l$ (2.24)

और (2.23) के दक्षिण पक्ष में आये कारकों को ज्ञात परिणाम [14] की सहायता से निम्नांकित मेलिन-बार्नीज कंटूर समाकल के पदों में लिखते हैं -

$$\prod_{j=1}^{W}(U_i^{(j)}x_i+V_i^{(j)})^{K_i^{(j)}}=\prod_{j=1}^{W}\left\{\frac{(U_i^{(j)}x_i+l_i^{\prime(j)})^{K_i^{(j)}}}{\Gamma(-K_i^{(j)})}\right\}$$

$$\times\frac{1}{(2\pi\omega)^{W}}\int_{L_1'}\cdots\int_{L_W'}\prod_{j=1}^{W}\left\{\Gamma(-\xi_\varphi')\Gamma(-K_i^{(j)}+\xi_j')\left[\frac{(x_i-u_i)U_i^{(j)}}{(u_iU_i^{(j)}+V_i^{(j)}}\right]^{\xi_j'}\right\}d\xi_1'\ldots d\xi_W' \quad (2.25)$$

जहाँ $\omega=\sqrt{-1}$ तथा

$$\prod_{j=W+1}^{T}(U_i^{(j)}x_i+V_i^{(j)})^{K_i^{(j)}}=\prod_{j=W+1}^{T}\left\{\frac{(v_iU_i^{(j)}x_i+l_i^{\prime(j)})^{K_i^{(j)}}}{\Gamma(-K_i^{(j)})}\right\}$$

$$\times\frac{1}{(2\pi\omega)^{T-W}}\int_{L_{W+1}'}\cdots\int_{L_T'}\prod_{j=W+1}^{T}\left\{\Gamma(-\xi_j')\Gamma(-K_i^{(j)}+\xi_j')\left[\frac{-(v_i-x_i)U_i^{(j)}}{(v_iU_i^{(j)}+V_i^{(j)})}\right]^{\xi_j'}\right\}d\xi_{W+1}'\ldots d\xi_T' \quad (2.26)$$

इसके बाद व्यंजक में हम बहुगुण समाकल के लिए सुविदित फुबिनी प्रमेय का सम्प्रयोग करते हैं। अन्त में (2.1) की सहायता से सबसे आन्तरिक x-समाकल का मान ज्ञात करके तथा बहुगुण मेलिन-बार्नीज कंटूर समाकल को $r+l+T$ चरों के बहुचर H-फलन के पदों में पुनः व्याख्यायित करके समाकल (2.2) के दक्षिण पक्ष को प्राप्त करते हैं। द्वितीय समाकल (2.15) को सिद्ध करने के लिए हम (2.2) की उपपत्ति में ग्रहण की गई विधि का अनुसरण करते हैं।

3. विशिष्ट दशाएँ

यदि (2.2) में $R=S=0$ रखें तो सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन चरघातांकी फलन में समानीत हो जाता है और हमें निम्नांकित रोचक परिणाम प्राप्त होता है -

$$\int_{u_1}^{v_1}\cdots\int_{u_s}^{v_s}\prod_{i=1}^{s}\left\{(x_i-u_i)^{\alpha_i-1}(v_i-x_i)^{\beta_i-1}\prod_{j=1}^{T}(U_i^{(j)}x_i+V_i^{(j)})^{\sigma_i^{(j)}}\right\}$$

$$\times H\left[z_1\prod_{i=1}^{s}\left\{\frac{(x_i-u_i)^{\delta_i^{(r)}}(v_i-x_i)^{\eta_i^{(r)}}}{\prod_{j=1}^{T}(U_i^{(j)}x_i+V_i^{(j)})^{\rho_i^{(j)}}}\right\},\ldots,z_r\prod_{i=1}^{s}\left\{\frac{(x_i-u_i)^{\delta_i^{(r)}}(v_i-x_i)^{\eta_i^{(r)}}}{\prod_{j=1}^{T}(U_i^{(j)}x_i+V_i^{(j)})^{\rho_i^{(j,r)}}}\right\}\right]$$

$$\times\exp\left[\sum_{k=1}^{l}gk\prod_{i=1}^{s}\left\{\frac{(x_i-u_i)^{\mu_i^{(k)}}(v_i-x_i)^{\theta_i^{(k)}}}{\prod_{j=1}^{T}(U_i^{(j)}x_i+V_i^{(j)})^{\tau_i^{(j,k)}}}\right\}\right]dx_1\ldots dx_s$$

$$=\prod_{i=1}^{s}\left\{(v_i-u_i)^{\alpha_i+\beta_i-1}\prod_{j=1}^{W}(u_iU_i^{(j)}+V_i^{(j)})^{\sigma_i^{(j)}}\prod_{j=W+1}^{T}(v_iU_i^{(j)}+V_i^{(j)})^{\sigma_i^{(j)}}\right\}$$

$$\times H^{0,N+sT+2s\ :I;I^*}_{p+sT+2s,Q+sT+s:j;j^*}\left[\begin{matrix}z_1w_1\\ \vdots\\ z_rw_r\\ g_1w_1'\\ \vdots\\ g_kw_k'\\ G_1\\ \vdots\\ G_T\end{matrix}\middle|\begin{matrix}A^*:C^*;-;\ldots;-\\ B^*:D^*;(0,1);\ldots;(0,1)\end{matrix}\right] \tag{3.1}$$

जहाँ $W_m(m=1,\ldots,r), w'_k\ (k=1,\ldots,l), G_j(j=1,\ldots,T)$ वही हैं जैसा कि क्रमशः

(2.3) से (2.5) तक के समीकरणों में परिभाषित हैं।

$$A^* \equiv \left(1+\sigma_i';\rho_i^{(1,1)},\ldots,\rho_i^{(1,r)},\tau_i^{(1,1)},\ldots,\tau_i^{(1,1)},1,\underbrace{0,\ldots,0}_{T-1}\right)_{1,s},$$

$$\ldots,\left(1+\sigma_i^{(T)};\rho_i^{(T,1)},\ldots,\rho_i^{(T,r)};\tau_i^{(T,1)},\ldots,\tau_i^{(T,\int)};\underbrace{0,\ldots,0,}_{T-1}1\right)_{1,s},$$

$$\left(1-\alpha_i;\delta_i',\ldots,\delta_i^{(r)},\mu_i,\ldots,\mu_i^{(\int)},\underbrace{1,\ldots,1}_{W},\underbrace{0,\ldots,0}_{T-W}\right)_{1,s},$$

$$\left(1-\beta_i;\eta_i',\ldots,\eta_i^{(r)},\theta_i',\ldots,\theta_i^{(\int)},\underbrace{0,\ldots,0}_{W},\underbrace{1,\ldots,1}_{T-W}\right)_{1,s},$$

$$\left(a_j;A_j',\ldots,A_j^{(r)},\underbrace{0,\ldots,0}_{\int+T}\right)_{1,p} \tag{3.2}$$

$$B^* \equiv \left(b_j;B_j',\ldots,B_j^{(r)},\underbrace{0,\ldots,0}_{\int+T}\right)_{1,Q},$$

$$\left(1+\sigma_j';\rho_i^{(1,1)},\ldots,\rho_i^{(1,r)},\tau_i^{(1,1)},\ldots,\tau_i^{(1,\int)},\underbrace{0,\ldots,0}_{T}\right)_{1,s},$$

$$\ldots,\left(1+\sigma_j^{(T)};\rho_i^{(T,1)},\ldots,\rho_i^{(T,r)},\tau_i^{(T,1)},\ldots,\tau_i^{(T,\int)},\underbrace{0,\ldots,0}_{T}\right)_{1,s},$$

$$\left(1-\alpha_i-\beta_i;(\delta_i'+\eta_i'),\ldots,(\delta_i^{(r)}+\eta_i^{(r)}),(\mu_i'+\theta_i'),\ldots,(\mu_i^{(\int)}+\theta_i^{(\int)}),\underbrace{1,\ldots,1}_{T}\right)_{1,s} \tag{3.3}$$

C*, D*, I, J, l*,.l* वही हैं जैसा कि क्रमशः (2.9) से (2.14) तक के समीकरणों में परिभाषित हैं। (3.1) की वैधता के प्रतिबन्ध मुख्य समाकल से सरलता से प्राप्त हैं। इसी प्रकार के परिणाम (2.15) के लिए प्राप्त किये जा सकते हैं। यदि हम (2.12) तथा (2.15) में $s = 1$ तथा $w = T$ रखें तो हमें सैगो तथा सक्सेना है [9,p 101,Eq.(2.1),p 102, Eq (2.3)] परिणाम प्राप्त होते हैं। यही नहीं, अनेक अन्य यूलेरी समाकल जिन्हें तमाम लेखकों ने [1, 2, 10, 11, 17] प्राप्त किये हैं वे हमारे समाकलों की विशिष्ट दशाएँ हैं। इस प्रपत्र में स्थापित सामान्य समाकल सूत्र (2.2) तथा (2.15) में से प्रत्येक से एक या दो चरों वाले उपयोगी विशिष्ट फलनों को प्रदान कर सकता है जिन्हें सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन [1,p 182], माइजर का फलन [1, p 207] एक या दो चरों वाला H-फलन [14] के रूप में प्राचलों तथा चरों में उपयुक्त परिवर्तन करके व्यक्त किया जा सकता है किन्तु विस्तार के रूप में उन्हें नहीं दिया जा रहा। पुनः यदि हम (2.2) तथा (2.5) में $\eta_i^{(r)} = \theta_i' = \ldots \theta_i^{(i)} = 0 (i = 1, \ldots, s)$ रखें तो ये समाकल सूत्र रीमान-लियोविले भिन्नांश समाकल आपरेटर का बहुविमीय तुल्य रूप प्रदान करते हैं जिसे निम्नवत् परिभाषित करते हैं।

$$ {}_{u_1}D_{x_i}^{-\beta_i} \cdots {}_{u_s}D_{x_s}^{-\beta_s}\{f(x, \ldots, x_s)\} $$

$$ = \int_{u_1}^{x_1} \cdots \int_{u_s}^{x_s} f(t_i, \ldots, t_s) \prod_{i=1}^{s} \left\{ \frac{(x_i - t_i)^{\beta_i - 1}}{\Gamma(\beta_i)} dt_i \right\} \tag{3.4} $$

जहाँ $Re(\beta_\iota) >)$ तथा $u_i (i = 1, \ldots, s)$ अचर हैं तथा

$$ f(x_i, \ldots, x_s) = \prod_{i=1}^{s} \left\{ (x_i - u_i)^{\alpha_i - 1} \prod_{i=1}^{T} (u_i U_i^{(j)} + V_i^{(j)})^{\sigma_i^{(j)}} \right\} $$

$$ \times H \left[z_1 \prod_{i=1}^{s} \left\{ \frac{(x_i - u_i)^{\delta_i^{(r)}}}{\prod_{j=1}^{T} (U_i^{(j)} x_i + V_i^{(j)})^{\rho_i^{(j,1)}}} \right\}, \ldots, z_r \prod_{i=1}^{s} \left\{ \frac{(x_i - u_i)^{\delta_i^{(r)}}}{\prod_{j=1}^{T} (U_i^{(j)} x_i + V_i^{(j)})^{\rho_i^{(j,r)}}} \right\} \right] $$

$$ \times {}_R F_S \left[(c_R); (d_S); -\sum_{k=1}^{t} gk \prod_{i=1}^{s} \left\{ \frac{(x_i - u_i)^{\mu_i^{(k)}} (v_i - x_i)^{0_i^{(k)}}}{\prod_{j=1}^{T} (U_i^{(j)} x_i + V_i^{(j)})^{\tau_i^{(j,k)}}} \right\} \right] \tag{3.5} $$

विस्तृत हल को आसानी से निकाला जा सकता है।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए. मेगनस, डब्ल्यू., ओबरहिटिंगर, एफ. तथा ट्रीकोमी, एफ. जी. : Higher Transcendental Functions, Vol. 1, McGraw-Hill, New York, (1953)

2. गर्ग, एम., गुप्ता, एम. के. तथा पुरोहित, एम. : गणित संदेश 1999,13,49-62.

3. गोयल, एस. पी. तथा पराशर, अलका : Far East J. Math. Sci. 1999, 1, 1003-1013.

4. गुप्ता, के. सी., गोयल, एस. पी. तथा लाधा, आर. के. : Tamkang J. Math., 1999, 30, 155-164.

5. गुप्ता, के. सी. तथा जैन रश्मी : Soochow J. Math 1993, 19, 73-81.

6. रायजादा, एस. के. : पी. एच. डी. थीसिस, बुन्देलखण्ड विश्वविद्यालय, 1991

7. सैगो, एम., गोयल, एस. पी. तथा सक्सेना, एस. : J Fractional Calculus, 1998,13, 43-56.

8. सैगो, एम. तथा सक्सेना, आर. के. : J Fractional Calculus, 1999,15, 91-107.

9. सैगो, एम., तथा सक्सेना, आर. के. : J Fractional Calculus, 1999,16, 99-110.

10. सक्सेना, आर. के. तथा नीशीमोटो, के. : J Fractional Calculus, 1994,6, 65-74.

11. सक्सेना, आर. के. तथा सैगो, एम. : J Fractional Calculus, 1998,13, 37-41.

12. श्रीवास्तव, एच. एम. : Indian J. Math. 1972, 14.

13. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा गर्ग, एम. : Rev. Roumaine Phys. 1987, 32, 685-92.

14. श्रीवास्तव, एच. एम., गुप्ता, के. सी. तथा गोयल, एस. पी. : The H-functions of One and Two Variables with Applications. South Asian Publ. New Dellhi and Madras (1982).

15. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा हुसैन, एम. ए. : Computer Math. Appl., 1995, 30, 73-85.

16. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा पंडा, आर. : J. Reine Angew Math. 1976, 283/284, 265-274.

17. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा सिंह, एन. पी. : Rend. Circ. Mat. Palermo. 1983, 32, 157-187.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 3, July 2003

परिमित समय क्षितिज में चरघातांकी ह्रासमान माँग वाला विकृतिमान वस्तुसूची मॉडल

पी० एन० गुप्ता तथा ललित रांकावत

गणित तथा सांख्यिकी विभाग, जे.एन.वी. यूनिवर्सिटी
जोधपुर (राजस्थान)

[प्राप्त - नवम्बर 11,2002]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में एक वस्तुसूची मॉडल का अध्ययन किया गया है जिसमें माँग का ह्रास समय के साथ चरघातांकी विधि से होता है। इसमें उत्पादन को माँग आश्रित मान लिया गया है और परिमित स्थिर स्फीति दर पर विचार किया गया है। इसमें संग्रह किये गये मदों की एक समान दर से विकृति को भी सम्मिलित किया गया है। अध्ययन किये जा रहे इस मॉडल की प्रकृति दर्शाने के लिए सांख्यिक हल प्राप्त किया गया है।

Abstract

A deteriorating inventory model with exponentially declining demand over a finite time horizon. *By* P.N.Gupta and Lalit Rankawat, Department of Mathematics and Statistics, J.N.V.University, Jodhpur (Raj.).

In this paper we have studied an inventory model in which demand is exponentially decreasing with time. Production is taken to be demand dependent and finite constant inflation rate is considered. Decay of stocked items at uniform rate is also included. Numerical solution is obtained to illustrate the nature of the model studied.

प्रस्तावना

विभिन्न शोधकर्ताओं ने स्टाक स्तर को नियन्त्रित करने वाले अनेक गणितीय मॉडलों

का अध्ययन वस्तुसूचियों के क्षेत्र में किया है। किन्तु विकृत हो रही मदों वाले उत्पादन वस्तुसूची मॉडलों पर प्रारम्भ में कोई ध्यान नहीं दिया गया। आज यह स्थिति है कि उत्पादन की दर माँग पर आश्रित है।

संग्रह किये गये मदों की विकृति एक सामान्य घटना है। घारे तथा श्रेडर[1] ने एक EOQ मॉडल विकसित किया है जिसका चरघातांकी वितरण ऋणात्मक है। इसमें यह प्रकल्पित किया गया है कि विकृति की तत्क्षण दर अचर है। काल पर आश्रित विकृति दर का अध्ययन कई शोधकर्ताओं ने [2,3,4,5] किया है। उन्होंने या तो तात्क्षणिक या परिमित उत्पादन दरों पर विकृति के विभिन्न प्रकारों के साथ विचार किया है।

देव तथ पटेल [6], सचान [7], हैपिंग तथा वैंग [8], गोस्वामी तथा चौधरी [9] एवं भुनिया तथा मैत्री [10] ने वस्तुसूची मॉडलों का अध्ययन किया है। वस्तुसूची नीति पर स्फीति प्रभाव का अध्ययन भी हुआ है।[11-15]

प्रस्तुत विवेचना में हम वास्तविक स्थिति में वस्तुसूची मॉडल का अध्ययन करने जा रहे हैं जिसमें माँग समय के चरघातांकी रूप से ह्रासमान फल के रूप में हैं। व्यावहारिक जीवन में यह स्थिति अत्यन्त सामान्य है। हमने माँग पर आश्रित उत्पादन पर विचार किया है। कमी तथा परिमिति स्फीति दर के बिना परिमित समय क्षितिज पर विचार किया गया है।

यहाँ पर वस्तुसूची के गणितीय मॉडल को निम्नांकित संकल्पनाओं तथा संकेतों का पालन करते हुए विकसित किया है।

संकल्पनाएँ :

1. इकाई मूल्य उस स्फीति दर के अनुसार बदलता है जिस तरह अन्य वस्तुसूची से सम्बद्ध मूल्य।

2. स्फीति दर स्थिर है ।

3. माँग दर $D(t)$ ज्ञात है और वह चरघातांकी रीति से घटती है अर्थात् समय t पर $D(t) = Ae^{-\lambda t}$ जहाँ A प्रारम्भिक माँग है और λ अत्यन्त लघु अंश है जो माँग की ह्रासमान दर को नियन्त्रित करता है।

4. किसी भी क्षण उत्पादन दर $P(t)$ माँग पर निर्भर करती है अर्थात् समय t पर $P(t) = \alpha + \beta\ D(t),\ 0 \leq \beta < 1$ तथा $P(t) > D(t)$.

5. इकाइयों की विकृति पर भी विचार किया जाता है जब वे उत्पन्न हो चुकी हों और वस्तुसूची बन चुकी हो।

6. किसी ज्ञात चक्र के दौरान विकृत मद की न तो बदली की जाती है न ही सुधार किया जाता है।

संकेतन

$I(t)$ = किसी समय t पर वस्तु सूची स्तर, $t \geq 0$

θ = प्रति इकाई समय में विकृत वस्तुसूची का स्थिर अंश

i = प्रति इकाई समय में प्रति मद पर चालू मूल्य

C_d = विकृत हुई इकाई की विकृति मूल्य

k = स्फीति की स्थिर दर

H = आयोजन क्षितिज की लम्बाई

$C_p(t)$ = किसी समय t पर उत्पन्न हुए मद का इकई उत्पादन मूल्य अर्थात्

$C_p(t) = P_0 e^{kt}$, जहाँ P_0 प्रारम्भिक इकाई उत्पादन मूल्य को बताता है।

गणितीय विश्लेषण

माना कि $H = MT$, जहाँ m पूर्णांक है जो अवधि H में उत्पादन चक्रों की संख्या को बताता है तथ प्रत्येक उत्पादन चक्र का दैर्घ्य T है।

काल अवधि $0 \leq t \leq T$ के अंतर्गत स्टाक की हालत को नियन्त्रित करने वाले अवकल समीकरणों को निम्नवत् लिखा जा सकता है -

$$\frac{dI}{dt} = P(t) - D(t) - \theta I \quad , \qquad 0 \leq t \leq t_i \qquad (1)$$

$$\frac{dI}{dt} = -D(t) - \theta I \quad , \qquad t_i \leq t \leq T \qquad (2)$$

समीकरण (1) का रूप

$$\frac{DI}{dt} = \alpha + (\beta - 1)Ae^{-\lambda t} - \theta I$$

हो जाता है जिससे सम्बन्ध

$$Ie^{\theta t} = \frac{\alpha}{\theta}e^{\theta t} + \frac{\beta - 1}{\theta - \lambda}Ae^{(\theta - \lambda)t} + k_1 \qquad (3)$$

$t = 0, I = 0$ पर $K_1 = \frac{\alpha}{\theta} - \frac{\beta - 1}{\theta - \lambda}.A$ देता है।

इसलिये सम्बन्ध (3) निम्नवत् हो जाता है -

$$I=\frac{\alpha}{\theta}(1-e^{-\theta t})+\frac{\beta-1}{\theta-\lambda}.A(e^{-\lambda t}-e^{-\theta t}) \quad , \quad 0\le t\le t_i \tag{4}$$

समीकरण (2)

$$\frac{DI}{dt}=A\,e^{-\lambda t}-\theta I$$

रूप धारण करता है। इसका समाकलन करने पर

$$Ie^{\theta t}=\frac{A}{\theta-\lambda}e^{(\theta-\lambda)_t}+k_2 \tag{5}$$

$$t=T, I=0 \text{ पर } K_2=\frac{A}{\theta-\lambda}e^{(\theta-\lambda)T} \text{ देता है।} \tag{6}$$

$$\text{इसतरह } e^{\theta t}T=\frac{A}{\theta-\lambda}[e^{(\theta-\lambda)T}-e^{(\theta-\lambda)t}]$$

$$\text{अथवा } I=\frac{A\,e^{-\lambda t}}{\theta-\lambda}[e^{(\theta-\lambda)(T-t)}-1] \quad , \quad t_i\le t\le T \tag{7}$$

$t=t_1$ पर I के मानों को (4) तथा (7) से समीकृत करने पर

$$\frac{Ae^{-\lambda t}}{\theta-\lambda}[e^{(\theta-\lambda)(T-t_1)}-1]=\frac{\alpha}{\theta}(1-e^{-\theta t_1})+\frac{\beta-1}{\theta-\lambda}A(e^{-\lambda t_1}-e^{-\theta t_1})$$

$$\text{अथवा } e^{(\theta-\lambda)(T-t_1)}-1=\frac{\theta-\lambda e^{-\lambda t_1}}{A}\left[\frac{\alpha}{\theta}(1-e^{-\theta t_1})+\frac{\beta-1}{\theta-\lambda}A(e^{-\lambda t_1}-e^{-\theta t_1})\right]$$

वाम पक्ष के प्रसार में θ तथा λ के द्वितीय तथा उच्चतर घात पदों की उपेक्षा करने पर

$$T=t_1+\frac{\alpha}{A\theta}[e^{\lambda t_1}-e^{-(\theta-\lambda)_{t_1}}]+\frac{\beta-1}{\theta-\lambda}(1-e^{-(\theta-\lambda)_{t_1}}) \tag{8}$$

इस समीकरण से

$$\frac{dT}{dt_1}=1+\frac{\alpha}{A\theta}[e^{\lambda t_1}-e^{-(\theta-\lambda)_{t_1}}]+\frac{\beta-1}{\theta-\lambda}(1-e^{-(\theta-\lambda)_{t_1}}) \tag{9}$$

मिलता है। θ तथा λ के द्वितीय तथा उच्चतर घात पदों की उपेक्षा करने पर

$$\frac{dT}{dt_1} = \frac{\alpha}{\Lambda}(1-\theta t_1 + 2\lambda t_1) + (\lambda - \theta)(\beta - 1)t_1 \tag{10}$$

उत्पादन मूल्य

चूँकि उत्पादन दर P(t) है अतः H क्षितिज पर उत्पादन मूल्य होगा -

$$C_p = \int_0^{t_1} P_0 e^{kt}(\alpha + \beta A e^{-\lambda t})dt + \int_T^{T+t_1} P_0 e^{kt}(\alpha + \beta A e^{-\lambda t})dt$$

$$+\int_{2T}^{2T+t_1} P_0 e^{kt}(\alpha + \beta A e^{-\lambda t})dt + \ldots + \int_T^{(m-1)T+t_1} P_0 e^{kt}(\alpha + \beta A e^{-\lambda t})dt \ldots \tag{11}$$

जिससे कुछ गणनाओं के बाद तथा के केवल प्रथम कोटि पदों को बनाये रख कर

$$C_p = P_0\left[\frac{\alpha}{\kappa}(e^{kH}-1)\left\{\frac{t_1(2+kt_1)}{T(2+kT)}\right\} + \frac{\beta A}{k-\lambda}(e^{(\kappa-\lambda)H}-1)\left\{\frac{t_1(2+(k-\lambda)t_1)}{T(2+(k-\lambda)T)}\right\}\right] \tag{12}$$

सम्पूर्ण चक्र के लिए विकृति मूल्य होगा -

$$C_d = mC_d\left[\int_0^{t_1}\theta I(t)dt + \int_{t_1}^{T}\theta I(t)dt\right]$$

$$= m\theta c_d\left[\int_0^{t_1}\left\{\frac{\alpha}{\theta}(1-e^{-\theta t}) + \frac{\beta-1}{\theta-\lambda}A(e^{-\lambda t} - e^{-\theta t})\right\}dt\right.$$

$$\left. + \frac{A}{\theta-\lambda}\int_{t_1}^{T}\left\{e^{(\theta-\lambda)(T-t)}e^{-\lambda t} - e^{-\lambda t}\right\}dt\right]$$

$$= m\theta C_d\left[\frac{\alpha}{\theta^2}(\theta t_1 + e^{-\theta t_1} - 1) + \frac{\beta-1}{\theta-\lambda}A\left(-\frac{e^{-\lambda t_1}}{\lambda} + \frac{e^{-\theta t_1}}{\theta} + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\theta}\right)\right.$$

$$\left. + \frac{Ae^{(\theta-\lambda)T}}{\theta-\lambda}\left(\frac{-e^{-\theta t} + e^{-\theta t_1}}{\theta} + \frac{e^{-\lambda T} - e^{-\lambda t_1}}{\lambda}\right)\right]$$

पिछले C_p की ही तरह गणना करने पर

$$C_d = m\theta c_d\left[\frac{\alpha t_1^2}{2} + \frac{(\beta-1)At_2^1}{2} + \frac{A(t_2^1 - T^2)}{2}(1+(\theta-\lambda)T\right] \tag{13}$$

इसी प्रकार आगे बढ़ती हुई अवधि पर वस्तुसूची के अंकित मूल्य को

$$C_c = im\left[\int_0^{t_1} I(t)dt + \int_{t_1}^{T} I(t)dt\right]$$

$$= im\left[\int_0^{t_1}\left\{\frac{\alpha}{\theta}(1-e^{-\theta t}) + \frac{\beta-1}{\theta-\lambda}A(e^{-\lambda t}-e^{-\theta t})\right\}dt + \frac{A}{\theta-\lambda}\int_{t_1}^{T}\left\{e^{(\theta-\lambda)(T-t)}e^{-\lambda t}-e^{-\lambda t}\right\}dt\right]$$

$$= im\left[\frac{\alpha}{\theta^2}(\theta t_1 + e^{-\theta t_1}-1) + \frac{\beta-1}{\theta-\lambda}A\left(-\frac{e^{-\lambda t_1}}{\lambda}+\frac{e^{-\theta t_1}}{\theta}+\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\theta}\right) + \frac{Ae^{(\theta-\lambda)T}}{\theta-\lambda}\left(\frac{-e^{-\theta t}+e^{\theta t_1}}{\theta}+\frac{e^{-\lambda T}-e^{-\lambda t_1}}{\lambda}\right)\right]$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है। और आगे सरलीकरण से

$$C_c = im\left[\frac{\alpha t_1^2}{6}(3-\theta t_1) + \frac{(\beta-1)At_1^2}{6}(3-(\theta+\lambda)t_1) + \frac{A(t_1-T)}{6}\left\{3(t_1+T)-(\theta+\lambda)(T^2+Tt_1+t_1^2)-3(\theta-\lambda)T(T+t_1\right\}\right] \quad (14)$$

प्राप्त होता है।

प्रणाली का मूल्य = उत्पादन मूल्य + अंकित मूल्य + विकृति मूल्य

$$C_p = P_0\left[\frac{\alpha}{\kappa}(e^{kH}-1)\left\{\frac{t_1(2+kt_1)}{T(2+kT)}\right\} + \frac{\beta A}{k-\lambda}(e^{(\kappa-\lambda)H}-1)\left\{\frac{t_1(2+(k-\lambda)t_1)}{T(2+(k-\lambda)T)}\right\}\right]$$

$$+im\left[\frac{\alpha t_1^2}{6}(3-\theta t_1) + \frac{(\beta-1)At_1^2}{6}(3-(\theta+\lambda)t_1)\right.$$

$$+\frac{A(t_1-T)}{6}\{3(t_1+T)-(\theta+\lambda)(T^2+Tt_1+t_1^2)-3(\theta-\lambda)T(T+t_1\}\Big]$$

$$+m\theta c_d\left[\frac{\alpha t_1^2}{2}+\frac{(\beta-1)At_1^2}{2}+\frac{A(t_1^2-T^2}{2}(1+(\theta-\lambda)T\right] \qquad (15)$$

अभीष्टतमता के लिए $\frac{dC}{dt_1}=0$ । इसलिए

$$P_0\left[\frac{\alpha}{\kappa}(e^{kH}-1)\left\{\frac{T(2+kT)(2+kt_1)-t_1(2+kt_1)-t_1(2+kt_1)(2+kT)dT/dt_1}{T^2(2+kT)^2}\right\}+\frac{\beta A}{k-\lambda}(e^{(\kappa-\lambda)H}-1)\right.$$

$$\left.\left\{\frac{T(2+(k-\lambda)T(2+2(k-\lambda)t_1)-t_1(2+(k-\lambda)t_1(2+2(k-\lambda)T\,dT/dt_1}{T^2(2+(k-\lambda)T)^2}\right\}\right]$$

$$+im\left[\frac{\alpha}{6}(6t_1-3\theta t_1^2)+\frac{(\beta-1)A}{6}(6t_1-3(\theta+\lambda)t_1^2)\frac{A}{6}\left(1-\frac{dT}{dt_1}\right)\right.$$

$$.\{3(t_1+T)-(\theta-\lambda)(T^{\partial}+Tt_1+t_1^2)-3(\theta-\lambda)(Tt_1+T^{\partial})\}+\frac{A}{6}(t_1-T)$$

$$\left\{3\left(1+\frac{dT}{dt_1}\right)-(0-\lambda)\left(2T\left(\frac{dT}{dt_1}\right)+T+t_1\left(\frac{dT}{dt_1}\right)+2t_1\right)-3(\theta-\lambda)\left(t_1\frac{dT}{dt_1}+T+2T\left(\frac{dT}{dt_1}\right)\right)\right\}$$

$$+m0c_d\left[\left\{\alpha t_1+(\beta-1)At_1+A(1+(\theta-\lambda)T)\left(t_1-T\frac{dT}{dt_1}\right)+\frac{A(t_1^2-T^{\partial})}{2}(\theta-\lambda)\frac{dT}{dt_1}\right\}\right]=0$$

t_1 तथा T के इष्टतम मान तत्पश्चात् प्रणाली की इष्टतम कुल लागत निकालने के लिए समीकरण (16) को (8) तथा (10) समीकरणों की सहायता से सिद्ध किया जा सकता है। किन्तु वैश्लैषिक हल अत्यन्त जटिल है अतः हमने उपयुक्त संख्या विधि की सहायता से संख्या हल ही प्राप्त किया है। हमने समीकरण (16) में निहित विविध प्राचलों के अनेक मान-समुच्चयों को लेकर t_1, T तथा C के इष्टतम मानों की संगणना के लिए N-R विधि का उपयोग किया। इस तरह से प्राप्त मान सारणी I में दिये गये हैं।

सारणी I

$k, \lambda, \beta, \theta$ प्राचलों के विभिन्न मानों के लिए t_1, T तथा C के इष्टतम मान। यहाँ पर α = 200 Units, A= 150 Units, I = Rs. 2, c_d = Rs. 3, P_0 = Rs. 10 तथा m = 1 मान लिया गया है।

k	λ	β	θ	t_1	T	C
.05	0.0	.20	.05	6.5615900	9.342394	0143804.10
.10	0.0	.20	.05	6.1455630	8.785336	0455836.40
.15	0.0	.20	.05	6.1435390	8.782619	1805845.00
.05	0.0	.25	.05	6.5388907	9.553409	0149949.20
.10	0.0	.25	.05	6.0574550	8.894892	0475032.20
.05	0.0	.25	.05	6.0510500	8.886093	1913432.00
.05	0.0	.30	.05	6.5145750	9.758075	0156166.50
.10	0.0	.30	.05	5.9725149	9.001225	0494489.80
.15	0.0	.30	.05	5.96220089	8.9867460	2024357.00
.05	0.0	.30	.07	5.15148900	7.2897940	0087568.77
.10	0.0	.30	.07	4.47518470	63900090	0166386.30
.15	0.0	.30	.07	4.38626700	6.2706450	.396952.80
.05	0.0	.20	.10	4.39376000	6.1302080	0065165.63
.10	0.0	.20	.10	3.30685800	4.7059570	0078535.28
.15	0.0	.20	.10	3.12229500	4.4905800	0128552.30
.05	0.0	.20	.12	4.34414000	5.9784400	0063057.89
.10	0.0	.20	.12	2.8865300	4.0955730	0058831.91
.15	0.0	.20	.12	2.6560370	3.7884810	0083195.64

निष्कर्ष

प्राचलों के मानों के अनेक संयोजनों के लिए प्रमेय के आंकिक हल के परिणामों को प्रदर्शित करने वाली सारणी से हम निम्नांकित निष्कर्ष निकाल सकते हैं -

ज्यों-ज्यों स्फीति दर बढ़ती है त्यों-त्यों t_1 तथा T दोनों अवधियां घटती जाती हैं किन्तु वस्तु सूची का कुल मूल्य बढ़ता है।

माँग की समानुपातिकता का अचर उत्पादन दर को प्रभावित करता है और इस अचर के मान में वृद्धि होने से अवधि बढती है, साथ ही प्रणाली का कुल मूल्य (लागत) भी बढ जाता है किन्तु अवधि घटती है।

विकृति की वर्धमान दर से t_1 तथा T दोनों ही अवधियाँ घटती हैं। इस मामले में प्रणाली की कुल औसत लागत भी घट जाती है।

निर्देश

1. घारे, पी. एम. तथा श्रेडर, जी. एफ. : J. Ind. Engg. 1963, 14, 234-238.
2. मण्डल, बी. एन. तथा फौजदार, एस. : J. Opl. Res.Soc. 1989, 40, 483-488.
3. गोस्वामी, ए. तथा चौधरी, के. एस. : Int. J. System Sci. 1991, 22, 181-187
4. बोस, एस. गोस्वामी, ए. तथा चौधरी, के. एस. : J. Opl. Res. Soc. 1995, 46, 771-782.
5. माक, के. एल. : Comp. & Indus. Engg. 1982, 6, 309-317.
6. दवे, यू. तथा पटेल, एल. के. : J. Opl. Res. Soc. 1981, 31, 137.142.
7. सचान, आर. एस. : J. Opl. Res. Soc. 1984, 35, 1013-1019.
8. हैपिंग, क्सु तथा शु (पिन) के वांग : Eur. J. Opr. Res. Soc. 1990, 46, 21-27.
9. गोस्वामी, ए. तथा चौधरी, के. एस. : J. Opl. Res. Soc. 1991, 42, 1105-1110
10. भुनिया, ए. के. तथा मैती, एम. : Opsearch 1997, 34, (1), 51-61.
11. सु चाओ-तोन, लीइंगतांग तथा हांग-चांग लियाओ : Opsearch 1996, 33, (2), 71-82.
12. बुजाकोट्ट, जे. ए. : Oper. Res. Soc. 1975, 26, 553-558.
13. मिश्रा, आर. बी. : Naval Res. Soc. Log. Qtly. 1979, 26, 161-165.
14. मंगियामेली, पी. एम. बैंक्स, जे. तथा श्वार्जबाख, एच : The Engg. Economist 1981, 26, 91-112.
15. ब्रह्मदत्त, ए. सी. : Productivity 1982, 23, 127-130.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 3, July 2003

बहुगुण हाइपरज्यामितीय फल के एकीकृत यूलरीय समाकलों का अध्ययन तथा उनके सम्प्रयोग

पी. एल. सेठी तथा आर.सी. भट्ट
गणित तथा सांख्यिकी विभाग, जे. एन. व्यास विश्वविद्यालय, जोधपुर
तथा
महेशचन्द्र व्यास
रक्षा प्रयोगशाला, जोधपुर

[प्राप्त - नवम्बर 2,2002]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में छः एकीकृत यूलरीय समाकलों के मान निकाले गये हैं। प्राप्त परिणामों से अनेक नवीन तथा ज्ञात परिणामों के रोचक एकीकरण तथा विस्तार निकलते हैं। ये समाकल जैकोबी बहुपद, गूल्ड तथा हापर बहुपद, लागेर बहुपद, श्रीवास्तव तथा डाउस्ट के सार्वीकृत लारिसेला फलन से युक्त हैं। अनेक विशिष्ट दशाएँ भी दी गई हैं।

Abstract

A study of unified Eulerian integrals of multiple hypergeometric function with applications. *By* P. L. Sethi and R. C. Bhatt, Department of Mathematics and Statistics J.N.Vyas University, Jodhpur (Raj.) and Mahesh Chandra Vyas, Defence Laboratory, Jodhpur (Raj.).

In this paper, we evaluate six unified Eulerian integrals. The first two of these integrals involve the product of general class polynomials $S_V^U[x]$, the generalized sequence of function $S_n^{\alpha,\beta,0}[x]$ and the multivariable hypergeometric function with gerneral argument. The third and fourth integrals involve the product of a general class of multivariable polynomials and the multiveriable hypergeomertic function where as the last two

integrals contain the product of another class of multivariable polynomials $S_v^{u_1,\ldots,u_r}[x_1,\ldots\ldots\ldots,x_r]$ and the multivatriable hypergeometric function in their integrands.

On account of the most general nature of the functions and polynomials occurring in the various integrals, our results provide interesting unifications and extensions of a large number of new and known results. To illustrate, we have obtained five special cases of these results, which are also sufficiently general in nature, and of interest in themselves. These integrals involve simpler polynomials such as, Jacobi polynomials, Gould & Hopper polynomials, Laguerre polynomials of several variables, generalized Lauricella function of Srivastava and Daoust respectively. References of several known integrals, which also follow as particular cases of our results, have also been given.

1. प्रस्तावना

इस प्रपत्र में सर्वप्रथम हम कतिपय महत्वपूर्ण फलनों की परिभाषा देंगे।वे निम्नवत् हैं

(I) फलनों का सार्वीकृत अनुक्रम

फलन के सार्वीकृत अनुक्रम को निम्नांकित रोड्रिग टाइप सूत्र [1991, p 64]

$S_n^{\alpha,\beta,\tau}[x;r,s,q,A,B,m,k',l]$

$$=(Ax+B)^{-\alpha}(1-\tau x^r)^{-\frac{\beta}{\tau}}T_{k',l}^{m+n}\left[(Ax+B)^{\alpha+qn}(1-\tau x^r)^{\frac{\beta}{\tau}+sn}\right] \qquad (1.1)$$

द्वारा अवकल आपरेटर

$$T_{k',l}\equiv(x^l+x\frac{d}{dx}) \qquad (1.2)$$

$$S_n^{\alpha,\beta,\tau}[x]=\sum_{v,u,e,p}\theta(v,u,e,p)x^R(1-\tau x^r)^{sn-v} \qquad (1.3)$$

के द्वारा परिभाषित किया जाता है जहाँ

$$\theta(v,u,e,p) = \frac{B^{qn}(-1)^c(-e)_p(\alpha)_c(-v)_u(-\alpha-qn)_p}{v!u!e!p!(1-\alpha-e)_p} 1^{m+n}$$

$$(-\tau)^v \frac{(-\frac{\beta}{\tau}-sn)_v}{(1-\alpha-e)_p}\left[\frac{(p+k'+ru)}{1}\right]_{m+n}\left(\frac{A}{B}\right)^c \quad (1.4)$$

$$R = 1(m+n) + rv + e \quad (1.5)$$

तथा इस प्रपत्र में सर्वत्र $\sum_{v,u,e,p}$ $\sum_{v=0}^{m+n}\sum_{u=0}^{v}\sum_{c=0}^{m+n}\sum_{p=0}^{c}$ के लिए आया है।

उल्लेखनीय है कि (1.1) द्वारा परिभाषित फलनों का सार्वीकृत अनुक्रम सामान्य प्रकृति का है और अनेक शोधकर्ताओं के परिणामों को एकीकृत करता है। [1, 2, 3, 6, 7, 8]

हम आगे (1.1) की निम्नांकित महत्वपूर्ण विशिष्ट दशाओं का उल्लेख कर रहे हैं ।

(i) (1.1) तथा (1.2) में $A = 1, B = 0$ रखने पर यह निम्नांकित में सरलीकृत हो जाता है

$$S_n^{\alpha,\beta,\tau}\lfloor x;r,s,q,1,0,m,k',1\rfloor$$

$$= (x)^{-\alpha}(1-\tau x^r)^{-\frac{\beta}{\tau}} T_{k',l}^{m+n}\left[(x)^{\alpha+qn}(1-\tau x^r)^{\frac{\beta}{\tau}+sn}\right] \quad (1.6)$$

$$S_n^{\alpha,\beta,\tau}[x] = \sum_{v=0}^{m+n}\sum_{u=0}^{v} \theta(v,u)x^{R'}(1-\tau x^r)^{n-v} \quad (1.7)$$

जहाँ $\theta(v,u) = \frac{1^{m+n}(-v)_u}{v!u!}(-\frac{\beta}{\tau}-sn)_v(\tau)^v\left[\frac{(\alpha+qn+k+ru)}{1}\right]_{m+n}$ (1.8)

$$R' = 1(m+n) + qn + rv \quad (1.9)$$

(ii) (1.1) तथा (1.2) में $\tau \to 0$ रखने तथा सुविदित परिणामों

$$\underset{\tau\to 0}{Lt}(1-\tau x^r)^{\frac{\beta}{\tau}} = \exp(-\beta x^r) \qquad \underset{|b|\to 0}{Lt}(b)_n(\frac{z}{b})^n = z^n$$

का उपयोग करने पर हमें निम्नांकित महत्वपूर्ण बहुपद सेट प्राप्त होता है -

$$S_n^{\alpha,\beta,\tau}\lfloor x;r,s,q,A,B,m,k',1\rfloor$$

$$= (Ax+B)^{-\alpha}\exp(\beta x^r)T_{k',l}^{m+n}\left[(Ax+B)^{\alpha+qn}\exp(-\beta x^r)\right]$$

$$S_n^{\alpha,\beta,\tau}[x] = \sum_{v,u,e,p} \theta_1(v,u,e,p)x^R \qquad (1.10)$$

जहाँ

$$\theta_1(v,u,e,p) = B^{qn} 1^{m+n} \frac{(-1)^c(-e)_p(-v)_u(-\alpha-qn)_p}{v!u!e!p!(1-\alpha-e)_p} \left[\begin{matrix} (i+k+ru \\ 1 \end{matrix}\right]_{m+n} \left(\frac{A}{B}\right)^c \qquad (1.11)$$

(iii) पुनः (1.9) में $A = 1, B = 0$ रखने पर हमें एक अन्य रोचक दशा प्राप्त होती है ।

$$S_n^{\alpha,\beta,0}\lfloor x;r,s,q,1,0,m,k,1\rfloor$$

$$= (x)^{-\alpha} \exp(\beta x^r) T_{k',l}^{m+n}\left[x^{\alpha+qn} \exp(-\beta x^r)\right] \qquad (1.12)$$

$$S_n^{\alpha,\beta,0}[x] = \sum_{v=0}^{m+n}\sum_{u=0}^{v} \theta_1(v,u)x^{R'}$$

$$\text{जहाँ } \theta_1(v,u) = 1^{m+n}\frac{(-v)_u}{v!u!}\left[\begin{matrix}(\alpha+qn+k+ru \\ 1\end{matrix}\right]_{m+n}(\beta)^v \qquad (1.13)$$

तथा R (1.8) में दिया हुआ है ।

(iv) यदि हम (1.12) में $q = k = m = 0$ तथा $l = -1$ लें तो हमें गूल्ड तथा हापर [3] का बहुपदों का वर्ग प्राप्त होता है -

$$S_n^{\alpha,\beta,0}\lfloor x;r,0,1,0,0,0,-n,-1\rfloor$$

$$= (x)^{-\alpha} \exp(\beta x^r) D_{x,1}^{m}\left[x^{\alpha} \exp(-\beta x^r)\right]$$

$$= (-1)^n H_n^{(r)}(x,\alpha,\beta) \qquad (1.14)$$

$$(-x)^n \sum_{v=0}^{u}\sum_{u=0}^{v} \frac{(-v)_u}{v!u!}(\beta x^r)^v \qquad (1.15)$$

(I I) बहुपदों की सामान्य श्रेणी

श्रीवास्तव[8] द्वारा प्रचारित बहुपदों का सामान्य वर्ग

$$S_V^U[x] = \sum_{K=0}^{(\frac{V}{U})} \frac{(-V)_{uk} A(V,K)}{K!} x^K, \qquad N = 0,1,2... \qquad (1.16)$$

जहाँ U यादृच्छिक घन पूर्णांक है, गुणांक $A_{N,K}(N,K \geq 0)$ यादृच्छिक अचर है,

वास्तविक या संमिश्र तथा $(\lambda)_n$ पाछमर संकेत को बताता है जिसे

$$(\lambda)_n = \frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma(\lambda)} = \begin{cases} 1 & ,n=0 \\ \lambda(\lambda+1).......(\lambda+n-1) & \forall n \in \{1,2,3,...\} \end{cases} \quad (1.17)$$

द्वारा परिभाषित करते हैं । (1.16) में आये गुणांक $A(V,K)$ को उपयुक्त रीति से विशेषीकृत करने पर बहुपद $S_V^U[x]$ के सामान्य वर्ग को चिरप्रतिष्ठित लाम्बिक बहुपदों तथा सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय बहुपद में समानीत किया जा सकता है। अब हम इसकी कुछ महत्वपूर्ण दशाएँ दे रहे हैं -

(i) यदि (1.16) में $U=2,\ A(V,K)=(-1)^k$ लें तो

$$S_v^2[x] \to x^{v/2} H\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]$$ हर्माइट बहुपद [श्रीवास्तव तथा पंडा 1979, p.106, cq. (5.5.4)]

(ii) (1.16) में $U=1, A(V,K)=\binom{V+\alpha}{v}\frac{(\alpha+\beta+V+1)}{(\alpha+1)_k}$ रखने पर

$$S_v^1[x] = P_v^{(\alpha,\beta)}[1-2x]$$ [जैकोबी बहुपद [सैगो 1975, p.64, eq.(4.3.2)]

(iii) (1.16) में $U=1, A(V,K)=\left[\frac{V+\alpha}{v}\right]\frac{1}{(\alpha+1)_k}$ रखने पर

$$S_v^1[x] = L_v^{\alpha}[x].$$ लागेर बहुपद [सैगो [1975, p.101, eq.(5.1.6)]

(iv) (1.16) में $A(V,K)=1$ रखने पर

$$S_v^u[x] = x^{-v/u} g_v^u\left[-\left(\frac{h}{x}\right)^{1/u}, h\right]$$ [गुल्ड तथा हापर बहुपद [1962, p.58]

(III) बहुचरीय बहुपद

बहुपदों के सामान्य वर्ग को निम्नांकित बहुचर बहुपदों के दो वर्गों में सार्वीकृत किया गया है-

(i) श्रीवास्तव तथा गर्ग [12] द्वारा प्रचारित बहुचर बहुपदों को निम्नवत् परिभाषित किया जाता है ।

$$S_v^{u_1,\ldots,u_r}[x_1,\ldots,x_r] = \sum_{k_1,\ldots,k_r=0}^{u_1k_1+\ldots u_rk_r \le V} (-V)_{u_1k_1+\ldots u_rk} A(V,k_1+\ldots,k_r)\frac{x_1^{k_1}}{k_1!}\cdots\frac{x_r^{k_r}}{k_r!} \quad (1.18)$$

जहां $U_1, \ldots, U_r$ यादृच्छिक धन पूर्णांक हैं तथा गुणांक $A(V;k1, \ldots, kr)$ $(V, k_i \geq 0, i = 1, \ldots, r)$ यादृच्छिक अचर है - वास्तविक या संमिश्र ।

(ii) श्रीवास्तव द्वारा प्रदत्त बहुचर बहुपद को निम्नांकित परिवर्धित रूप में परिभाषित और प्रदर्शित किया जाता है -

$$S_{V_1, \ldots, V_r}^{U_1, \ldots, U_r}[x_1, \ldots x_r] = \sum_{k_1=0}^{(\frac{V_1}{U_1})} \cdots \sum_{k_r=0}^{(\frac{V_r}{U_r})} (-V_1)_{U_1 k_1} \cdots (-V_r)_{U_r k_r} A(V, k_1 + \ldots + k_r) \frac{x_1^{k_1}}{k_1!} \cdots \frac{x_r^{k_r}}{k_r!} \quad (1.9)$$

जहाँ $Vi = 0, 1, 2, \ldots (i = 1, \ldots r), U_1, \ldots, U_r$ यादृच्छिक धन पूर्णांक हैं तथा गुणांक $A(V_1, k_1, \ldots, V_r, k_r)$ यादृच्छिक अचर है - वास्तविक या संमिश्र।

(I V) बहुचरीय हाइपरज्यामितीय फलन

गास फलन ${}_pF_q$ का सामान्यीकरण तथा इसके संगामी रूपों को प्राचलों तथा चरों की संख्या में वृद्धि करके इच्छानुरूप किया जा सकता है। इस दृष्टि से श्रीवास्तव तथा डाउस्ट ने गुणज श्रेणी दी है -

$$F_{C:D' \ldots; D^{(n)}}^{A:B' \ldots; B^{(n)}} \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix} \equiv F_{C:D' \ldots D^{(n)}}^{A:B' \ldots B^{(n)}} \left(\begin{matrix} [(a):0', \ldots, 0^{(n)}]: [(b):\phi]; \ldots; [(b^{(n)}):\phi^{(n)}]; \\ [(c):\psi', \ldots, \psi^{(n)}]: [(d'):\delta']; \ldots; [(d^{(n)}):\delta^{(n)}]; \end{matrix} Z_1, \ldots, Z_n \right) \quad (1.20)$$

$$= \sum_{m_1, \ldots, m_n = 0}^{\infty} \Omega(m_1, \ldots, m_n) \frac{Z_1^{m_1}}{m_1!} \cdots \frac{Z_n^{m_n}}{m_n!} \quad (1.21)$$

जहाँ सुविधा हेतु

$$\Omega(m_1, \ldots, m_n) = \frac{\prod_{j=1}^{A} (a_j)_{m_1 0'_j + \ldots + m_n 0_j^{(n)}} \prod_{j=1}^{B'} (b'_j)_{m_1 \phi'_j} \cdots \prod_{j=1}^{B^{(n)}} (b_j^{(n)})_{m_n \phi_j^{(n)}}}{\prod_{j=1}^{C} (c_j)_{m_1 \psi'_j + \ldots + m_n \psi_j^{(n)}} \prod_{j=1}^{D'} (d'_j)_{m_1 \delta'_j} \cdots \prod_{j=1}^{D^{(n)}} (d_j^{(n)})_{m_n \delta_j^{(n)}}} \quad (1.22)$$

(1.22)

इन गुणांकों की धनात्मकता की कल्पना श्रीवास्तव तथा डाउस्ट द्वारा की गई ।

$$\left\{ \begin{matrix} 0_j^{(k)}, j = 1, \ldots, A; \phi_j^{(k)}, j = 1, \ldots B^{(k)}; \psi_j^{(k)}, j = 1, \ldots, C; \\ \delta_j^{(k)}, j = 1, \ldots, D^{(k)}; \forall k \in \{1, \ldots, n\} \end{matrix} \right\} \quad (1.23)$$

(c) तथा $(d^{(k)}), k = 1, \ldots\ldots, n;$ के लिए भी ऐसी ही व्याख्या दी जा सकती है । यद्यपि (1.6) उपयोगी सार्वीकरण है किन्तु कुछ प्रयोजनों के लिए बहुगुण हाइपरज्यामितीय फलन उपयोगी है । अतः हम सार्वीकृत कैम्पे द फेरी फलन पर विचार करेंगे जिसे सर्वप्रथम कार्लसन[5] ने दिया था और निम्नवत् परिभाषित किया -

$$F^{A:B}_{C,D}\left(\begin{matrix}(a):(b_1);\ldots\ldots\ldots\ldots;(b_n);\\(c):(d_1);\ldots\ldots\ldots\ldots;(d_n);\end{matrix} z_1,\ldots\ldots, z_n\right)$$

$$\prod_{m_n,\ldots\ldots, m_n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m_1,\ldots\ldots, m_n}(b_1)_{m_1}\ldots\ldots(b_n)_{m_n}}{(c)_{m_1,\ldots\ldots, m_n}(d_1)_{m_1}\ldots\ldots(d_n)_{m_n}} \frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\cdots\cdots\frac{z_n^{m_n}}{m_n!} \qquad (1.24)$$

हमें यह (1.24) बहुचर सार्वीकरण प्राप्त होता है जिसे कभी कभी

$$F^{\,p:q_1;\ldots\ldots\ldots\ldots q_n}_{\,l;m_1;\ldots\ldots\ldots\ldots m_n}\begin{pmatrix}Z_1\\ \vdots\\ \vdots\\ Z_n\end{pmatrix} \equiv F^{p:q_1;\ldots\ldots q_n}_{;m_1;\ldots\ldots m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):(b'_{q_1});\ldots;(b^{(n)}_{q_n});\\(\alpha_1):(\beta'_{m_1});\ldots;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix} z_1\ldots\ldots, z_n\right)$$

$$= \sum_{s_1,\ldots, s_n=0}^{\infty} \Lambda(s_1,\ldots\ldots, s_n)\frac{z_1^{s_1}}{s_1!}\cdots\frac{z_n^{s_n}}{s_n!} \qquad (1.25)$$

द्वारा परिभाषित किया जाता है जहाँ -

$$\Lambda(s_1,\ldots\ldots\ldots\ldots s_n) = \frac{\prod_{j=1}^{p}(a_j)_{s_1+\ldots\ldots+s_n}\prod_{j=1}^{q_1}(b'_j)_{s_1}\ldots\ldots\prod_{j=1}^{q_n}(b_j^{(n)})_{s_n}}{\prod_{j=1}^{l}(\alpha_j)_{s_1+\ldots\ldots+s_n}\prod_{j=1}^{m_1}(\beta'_j)_{s_1}\ldots\ldots\prod_{j=1}^{m_n}(\beta_j^{(n)})_{s_n}} \qquad (1.26)$$

2. $S_V^U[x]$ तथा $S_n^{\alpha,\beta,0}$ वाले प्रथम तथा द्वितीय समाकल

(i) $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}.S_V^U\left[yx^{\mu}(1-x)^{v}\right].S_n^{\alpha,\beta,0}\left[hx^{\xi}(1-x)^{\zeta}\right]$

$$F^{p:q_1;\ldots\ldots q_n}_{l:m_1;\ldots\ldots m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):(b'_{q_1});\ldots;(b^{(n)}_{q_n});\\(\alpha_1):(\beta'_{m_1});\ldots;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix} z_1x^{\lambda}\ldots\ldots, z_nx^{\lambda}\right)dx$$

$$\frac{\Gamma(\eta)\Gamma(\omega)}{\Gamma(\eta+\omega)}\sum_{k=0}^{\left(\frac{V}{U}\right)}\phi_1(k,v,u,c,p)$$

$$F^{p+\lambda:q_1;\ldots\ldots;q_n}_{l+\lambda;m_1;\ldots\ldots;m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):\frac{\eta}{\lambda},\ldots\ldots,\frac{\eta+\lambda-1}{\lambda}:(b'_{q_1});\ldots;(b^{(n)}_{q_n});\\(\alpha_l):\frac{\eta+\omega}{\lambda},\ldots,\frac{\eta+\omega+\lambda-1}{\lambda}:(\beta'_{m_l});\ldots;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix}z_1\ldots\ldots,z_n\right) \quad (2.1$$

जहाँ बहुपदों $S^{u}_{v}[x]$ के समान्य वर्ग फलन $S^{\alpha,\beta,0}_{n}[x]$ का सार्वीकृत अनुक्रम त (2.1) में आये बहुचरीय हाइपरज्यामितीय फलन को क्रमशः (1.16) (1.10) तथा (1.25) द्व परिभाषित किया जाता है। जहाँ

$$\phi_1(k,v,u,e,p)=\frac{(-V)_{UK}A(V,K)\theta_1(u,v,e,p)h^R}{K!}y^k \quad (2.2$$

$$\eta=a+\mu k+\xi R \qquad \text{तथा} \qquad \omega=b+\vartheta k+\zeta R \quad (2.3$$

निम्नांकित प्रतिबन्धों को भी तुष्ट हुआ मान लिया गया है -

(i) $Re(a,b,r)>0, Re(\eta,\omega)>0$

(ii) $Min(\mu,v,\theta,\lambda,';\xi,\zeta p,q_j)\geq 0(j=1,2,\ldots\ldots,n)$ (एकसाथ शून्य नहीं)

(iii) (a) $\mu\geq 0, v\geq 0, \Delta_1>0, \Delta_2>0$

(b) $\mu<0, v<_0, \Delta_1+\mu[V/U]>0, \Delta_2+v[V/U]>0$

(c) $\mu\geq 0, v<0, \Delta_1>0, \Delta_2+v[V/U>0$

(d) $\mu<0, v\geq 0, \Delta_1+\mu[V/U]>0, \Delta_2+v_2>0$

जहाँ

$$\Delta_1 = Re(a)+\xi\{(l(m+n)+p+\sum_{j=1}^{n}q_j \quad (2.4)$$

$$\Delta_2 = Re(a)+\xi\{(l(m+n)+p+\sum_{j=1}^{n}q_j$$

द्वितीय समाकल

$$(2)\ \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}.S^{U}_{V}\left[yx^{\mu}(1-x)^{v}\right].S^{\alpha,\beta,0}_{n}\left[hx^{\xi}(1-x)^{\zeta}\right]$$

$$F^{p:q_1;\ldots\ldots;q_n}_{l;m_1;\ldots\ldots;m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):(b'_{q_1});\ldots;(b^{(n)}_{q_n});\\(\alpha_l):(\beta'_{m_1});\ldots;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix}z_1x^{\lambda}\ldots\ldots,z_nx^{\lambda}(1-x)^{\lambda}\right)dx \quad (2.5)$$

$$= \frac{\Gamma(\eta)\Gamma(\omega)}{\Gamma(\eta+\omega)} \sum_{k=0}^{(\frac{V}{U})} \phi_1(k,v,u,e,p)$$

$$F^{p+2\lambda:q_1;\ldots\ldots;q_n}_{1+2\lambda;m_1;\ldots\ldots;m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):\frac{\eta}{\lambda},\ldots\ldots\ldots,\frac{\eta+\lambda-1}{\lambda}:(b'_{q_1});\ldots;(b^{(n)}_{q_n});\\ (\alpha_1):\frac{\eta+\omega}{\lambda},\ldots\ldots,\frac{\eta+\omega+\lambda-1}{\lambda}:(\beta'_{m_1});\ldots;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix}\frac{z_1}{4^\lambda},\ldots\ldots,\frac{z_n}{4^\lambda}\right)$$

जहाँ बहुपदों के सामान्य वर्ग $S^U_V[x]$ फलन $S^{\alpha,\beta,0}_n[x]$ का सार्वीकृत अनुक्रम तथा (2.6) में आये बहुचरीय हाइपरज्यामितीय फलन को क्रमशः (1.16) (1.10) एवं (1.25) द्वारा परिभाषित किया जाता है-

जहाँ

$$\phi_1(k,v,u,e,p) = \frac{(-V)_{UK} A(V,K)\theta_1(u,v,e,p)h^R}{K!} y^k \qquad (2.6)$$

$$\eta = a+\mu k+\xi R \quad \text{तथा} \quad \omega = b+\vartheta k+\zeta R \qquad (2.7)$$

निम्नांकित प्रतिबंधों को भी तुष्ट हुआ मान लिया गया है -

(iv) $Re(a,b,r)>0, Re(\eta,\omega)>0$

(v) $Min(\lambda,p,q_j)\geq 0(j=1,2,\ldots\ldots\ldots,n)$ (एकसाथ सभी शून्य नहीं)

(vi) (a) $\mu\geq 0, v\geq 0, \Delta_1>0, \Delta_2>0$

(b) $\mu<0, v<_0, \Delta_1>0, \Delta_2+v[V/U]>0$

(c) $\mu\geq 0, v<0, \Delta_1>0, \Delta_2+v[V/U>0$

(d) $\mu<0, v\geq 0, \Delta_1+\mu[V/U]>0, \Delta_2+v_2>0$

जहाँ $\Delta_1 = Re(a)+\xi\{(l(m+n)+p+\sum_{j=1}^{n} q_j$ (2.8)

$$\Delta_2 = Re(a)+\xi\{(l(m+n)+p+\sum_{j=1}^{n} q_j$$

3. $S^{U_1,\ldots\ldots,U_r}_{V_1,\ldots\ldots,V_r}[x_1,\ldots\ldots,x_r]$ **वाले तृतीय तथा चतुर्थ समाकल**

तृतीय समाकल

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}.S^{U_1,\ldots\ldots,U_r}_{V_1,\ldots\ldots,V_r}\left[y_1x^{\mu_1}(1-x)^{v_1},\ldots\ldots\ldots,y_rx^{\mu_r}(1-x)^{v_r}\right]$$

$$F^{p:q_1;\ldots\ldots q_n}_{1;m_1;\ldots\ldots m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):(b'_{q_1});\ldots;(b^{(n)}_{q_n}); \\ (\alpha_1):(\beta'_{m_1});\ldots;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix} z_1x^{\lambda}\ldots\ldots, z_nx^{\lambda}\right)dx$$

$$=\frac{\Gamma(\eta_1)\Gamma(\omega_1)}{\Gamma(\eta_1+\omega_1)}\sum_{k_1=0}^{(\frac{V_1}{U_1})}\cdots\sum_{k_r=0}^{(\frac{V_r}{U_r})}(-V_1)_{U_1k_1}\cdots(-V_r)_{U_rk_r}A(V_1,k_1;\ldots V_r,k_r)\prod_{i=1}^{r}\left\{\frac{y_1^{k_1}}{k_1!}\right\}$$

$$F^{p+\lambda:q_1;\ldots\ldots q_n}_{1+\lambda;m_1;\ldots\ldots m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):\frac{\eta_1}{\lambda},\ldots\ldots\ldots,\frac{\eta_1+\lambda-1}{\lambda}:(b'_{q_1});\ldots;(b^{(n)}_{q_n}); \\ (\alpha_1):\frac{\eta_1+\omega_1}{\lambda},\ldots\ldots,\frac{\eta_1+\omega+\lambda-1}{\lambda}:(\beta'_{m_1});\ldots;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix} z_1\ldots\ldots,z_n\right) \quad (3.1)$$

जहाँ बहुपदों $S^{U_1,\ldots\ldots,U_r}_{V_1,\ldots\ldots,V_r}[x_1,\ldots\ldots,x_r]$ का सामान्य वर्ग तथा (3.1) में आया बहुचरीय हाइपरज्यामितीय फलन (1.25) क्रमशः (1.19) तथा (1.25) द्वारा परिभाषित होते हैं जहाँ

$$\eta_1 = a+\prod_{j=1}^{r}\mu_j k_j \qquad \text{एवं} \qquad \omega_1 = b+\prod_{j=1}^{r}v_j k_j \quad (3.2)$$

निम्नांकित प्रतिबंधों को तुष्ट हुआ मान लिया गया है ।

(vii) $Re(a,b,r)>0, Re(\eta_1,\omega_1)>0$

(viii) $Min(\lambda,p,q_j)\geq 0(j=1,2,\ldots\ldots,n)$ (एकसाथ शून्य नहीं)

(ix) (a) $\Delta_1>0,\Delta_2>0$

(b) $\Delta_l+[V/U]>0,\Delta_2+[V/U]>0$

(c) $\Delta_1>0,\Delta_2+[V/U]>0$

(d) $\Delta_1+[V/U]>0,\Delta_2+v_2>0$

$$\Delta_1 = Re(a)+p+\sum_{j=1}^{n}q_j \quad (3.3)$$

$$\Delta_2 = Re(a)+p+\sum_{j=1}^{n}q_j$$

चतुर्थ समाकल

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}.S^{U_1,\ldots\ldots U_r}_{V_1,\ldots\ldots V_r}\left[y_1x^{\mu_1}(1-x)^{v_1},\ldots\ldots,y_rx^{\mu_r}(1-x)^{v_r}\right]$$

$$F^{p:q_1;\ldots\ldots\ldots;q_n}_{l;m_1;\ldots\ldots\ldots;m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):(b'_{q_1});\ldots;(b^{(n)}_{q_n});\\(\alpha_l):(\beta'_{m_1});\ldots;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix} z_1x^{\lambda}(1-x)^{\lambda}\ldots\ldots,z_nx^{\lambda}(1-x)_{\lambda}\right)dx$$

$$=\frac{\Gamma(\eta_1)\Gamma(\omega_1)}{\Gamma(\eta_1+\omega_1)}\sum_{k_1=0}^{(\frac{V_1}{U_1})}\cdots\sum_{k_r=0}^{(\frac{V_r}{U_r})}(-V_1)_{U_1k_1}\cdots(-V_r)_{U_rk_r}A(V_1,k_1;\ldots V_r,k_r)\prod_{i=1}^{r}\left\{\frac{y_i^{k_i}}{k_i!}\right\}$$

$$F^{p+2\lambda:q_1;\ldots\ldots\ldots;q_n}_{l+2\lambda;m_1;\ldots\ldots\ldots;m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):\frac{\eta_1}{\lambda},\ldots\ldots\ldots\ldots,\frac{\eta+\lambda-1}{\lambda}:(b'_{q_1});\ldots;(b^{(n)}_{q_n});\\(\alpha_l):\frac{\eta_1+\omega_1}{\lambda},\ldots\ldots,\frac{\eta_1+\omega_1+\lambda-1}{\lambda}:(\beta'_{m_1});\ldots;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix}\frac{z_1}{4^{\lambda}}\ldots\ldots,\frac{z_n}{4^{\lambda}}\right)$$

जहाँ पर बहुपदों का सामान्य वर्ग $S^{U_1,\ldots\ldots,U_r}_{V_1,\ldots\ldots,V_r}[x_1,\ldots\ldots,x_r]$ तथा (3.4) में आया हाइपरज्यामितीय फलन को क्रमशः (1.19) एवं (1.25) द्वारा परिभाषित किया जाता है।

$$\eta_1 = a\prod_{j=1}^{r}\mu_jk_j \qquad \text{तथा} \qquad \omega_1 = b+\prod_{j=1}^{r}v_jk_j \tag{3.4}$$

निम्नांकित प्रतिबंधों को भी तुष्ट हुआ मान लिया गया है ।

(x) $Re(a,b,r)>0, Re(\eta_1,\omega_1)>0$

(xi) $Min(\lambda,p,q_j)\geq 0(j=1,2,\ldots\ldots\ldots,n)$

(xii) (a) $\Delta_1>0,\Delta_2>0$

(b) $\Delta_1+[V/U]>0,\Delta_2+[V/U]>0$

(c) $\Delta_1>0,\Delta_2+[V/U]>0$

(d) $\Delta_1+[V/U]>0,\Delta_2>0$

जहाँ

$$\Delta_1 = Re(a)+p+\sum_{j=1}^{n}q_j \tag{3.6}$$

$$\Delta_2 = Re(a)+p+\sum_{j=1}^{n}q_j$$

4. $S^{U_1,\ldots\ldots,U_r}_{V_1,\ldots\ldots,V_r}[x_1,\ldots\ldots,x_r]$ वाले पंचम तथा षष्ठ समाकल

पंचम समाकल

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}.S^{U_1,\ldots\ldots,U_r}_{V}\left[y_1x^{\mu_1}(1-x)^{v_1},\ldots\ldots,y_rx^{\mu_r}(1-x)^{v_r}\right]$$

$$XF^{p:q_1;\ldots\ldots;q_n}_{1;m_1;\ldots\ldots;m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):(b'_{q_1});\ldots\ldots;(b^{(n)}_{q_n});\\(\alpha_1):(\beta'_{m_1});\ldots\ldots;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix} z_1x^\lambda\ldots\ldots,z_nx^\lambda\right)dx$$

$$=\frac{\Gamma(\eta_2)\Gamma(\omega_2)}{\Gamma(\eta_2+\omega_2)}\sum_{k_1,\ldots\ldots,k_r=0}^{U_1k_1+\ldots\ldots U_rk_r\le V}(-V_1)_{U_1k_1}\cdots(-V_r)_{U_rk_r}A(V_1,k_1;\ldots V_r,k_r)$$

$$F^{p+\lambda:q_1;\ldots\ldots;q_n}_{1+\lambda;m_1;\ldots\ldots;m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):\frac{\eta_2}{\lambda},\ldots\ldots,\frac{\eta_2+\lambda-1}{\lambda}:(b'_{q_1});\ldots\ldots;(b^{(n)}_{q_n});\\(\alpha_1):\frac{\eta_2+\omega_2}{\lambda},\ldots\ldots,\frac{\eta_2+\omega_2+\lambda-1}{\lambda}:(\beta'_{m_1});\ldots\ldots;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix} z_1\ldots\ldots,z_n\right) \tag{4.1}$$

जहाँ

$$\eta_2=a+\prod_{j=1}^{r}\mu_jk_j \qquad \omega_2=b+\prod_{j=1}^{r}v_jk_j \tag{4.2}$$

जहाँ बहुपद $S^{U_1,\ldots\ldots,U_r}_{V_1,\ldots\ldots,V_r}[x_1,\ldots\ldots,x_r]$ को सामान्य वर्ग तथा (4.1) में आये बहुचरीय हाइपरज्यामितीय फलन को क्रमशः (1.18) तथा (1.25) द्वारा परिभाषित किया जाता है।

निम्नांकित प्रतिबंधों को तुष्ट हुआ मान लिया गया है ।

(xiii) $Re(a,b,r)>0, Re(\eta_2,\omega_2)>0$

(xiv) $Min(\lambda,p,q_j)\ge 0(j=1,2,\ldots\ldots,n)$ (एकसाथ शून्य नहीं)

(xv) (a) $\Delta_1>0,\Delta_2>0$

(b) $\Delta_1+[V/U]>0,\Delta_2+[V/U]>0$

(c) $\Delta_1>0,\Delta_2+[V/U]>0$

(d) $\Delta_1+[V/U]>0,\Delta_2>0$

जहाँ

$$\Delta_1=Re(a)+p+\sum_{j=1}^{n}q_j \tag{4.3}$$

$$\Delta_2=Re(a)+p+\sum_{j=1}^{n}q_j$$

षष्ठम समाकल

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}.S^{U_1,\ldots\ldots,U_r}_{V}\left[y_1x^{\mu_1}(1-x)^{v_1},\ldots\ldots,y_rx^{\mu_r}(1-x)^{v_r}\right]$$

$$F^{p:q_1;\ldots\ldots\ldots;q_n}_{1;m_1;\ldots\ldots\ldots;m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):(b'_{q_1});\ldots..;(b^{(n)}_{q_n});\\(\alpha_1):(\beta'_{m_1});\ldots.;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix} z_1x^{\lambda}(1-x)^{\lambda}\ldots\ldots., z_nx^{\lambda}(1-x)^{\lambda}\right)dx$$

$$=\frac{\Gamma(\eta_2)\Gamma(\omega_2)}{\Gamma(\eta_2+\omega_2)}\sum_{k_1,\ldots\ldots\ldots\ldots,k_r=0}^{U_1k_1+\ldots\ldots\ldots\ldots U_rk_r\le V}(-V_1)_{U_1k_1}\cdots(-V_r)_{U_1k_1+\ldots\ldots\ldots U_rk}A(V,k_1+\ldots,k_r)$$

$$F^{p+2\lambda:q_1;\ldots\ldots\ldots;q_n}_{1+2\lambda;m_1;\ldots\ldots\ldots;m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):\frac{\eta_2}{\lambda},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\frac{\eta_2+\lambda-1}{\lambda}:(b'_{q_1});\ldots..;(b^{(n)}_{q_n});\\(\alpha_1):\frac{\eta_2+\omega_2}{\lambda},\ldots\ldots\ldots,\frac{\eta_2+\omega_2+\lambda-1}{\lambda}:(\beta'_{m_1});\ldots.;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix}\frac{z_1}{4^{\lambda}},\ldots\ldots.,\frac{z_n}{4^{\lambda}}\right)$$

जहाँ पर (4.4) में आये बहुपदों $S^{U_1,\ldots\ldots\ldots,U_r}_{V_1,\ldots\ldots\ldots,V_r}[x_1,\ldots\ldots\ldots.,x_r]$ का सामान्य वर्ग तथा हाइपरज्यामितीय फलन क्रमशः (1.18) तथा (1.25) द्वारा परिभाषित किये जाते हैं जहाँ

$$\eta_2 = a+\prod_{j=1}^{r}\mu_jk_j\ ,\qquad \omega_2 = b+\prod_{j=1}^{r}v_jk_j \tag{4.5}$$

यहीं नहीं, निम्नांकित प्रतिबंधों को तुष्ट हुआ मान लिया गया है ।

(xvi) $Re(a,b,r)>0, Re(\eta_2,\omega_2)>0$

(xvii) $Min(\lambda,p,q_j)\ge 0(j=1,2,\ldots\ldots\ldots.,n)$ (एकसाथ शून्य नहीं)

(xviii) (a) $\Delta_1>0,\Delta_2>0$

(b) $\Delta_1+[V/U]>0,\Delta_2+[V/U]>0$

(c) $\Delta_1>0,\Delta_2+[V/U]>0$

(d) $\Delta_1+[V/U]>0,\Delta_2>0$

5. समाकलों की व्युत्पत्ति

प्रथम समाकल (1.1) को स्थापित करने के लिए सर्वप्रथम हम बहुपदों $S^U_V[x]$ के सामान्य वर्ग तथा अपनी अपनी श्रेणियों के वाम पक्ष में आये फलन $S^{\alpha,\beta,0}_n[x]$ के सार्वीकृत अनुक्रम को क्रमशः समीकरण (1.16) तथा (1.10) की सहायता से व्यक्त करेंगे । तब (2.1) का वाम पक्ष निम्नांकित रूप धारण करता है -

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}.S^U_V\left[yx^{\mu}(1-x)^{v}\right].S^{\alpha,\beta,0}_n\left[hx^{\xi}(1-x)^{\zeta}\right]$$

$$F^{p:q_1;\ldots\ldots q_n}_{l;m_1;\ldots\ldots m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):(b'_{q_1});\ldots;(b^{(n)}_{q_n});\\(\alpha_1):(\beta'_{m_1});\ldots;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix} z_1x^{\lambda}\ldots\ldots,z_nx^{\lambda}\right)dx$$

$$=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\sum_{K=0}^{(\frac{V}{U})}\frac{(-V)_{UK}A(V,K)}{K!}y^k x^{\mu k}(1-x)^{vk}\sum_{k=0}^{(\frac{V}{U})}\theta_1(v,u,e,p,)\,h^R x^{\xi R}(1-x)^{\zeta R}$$

$$F^{p:q_1;\ldots\ldots q_n}_{l;m_1;\ldots\ldots m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):(b'_{q_1});\ldots;(b^{(n)}_{q_n});\\(\alpha_1):(\beta'_{m_1});\ldots;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix} z_1x^{\lambda}\ldots\ldots,z_nx^{\lambda}\right)dx \tag{5.1}$$

(5.1) में (1.25) से $F^{p:q_1;\ldots\ldots q_n}_{l;m_1;\ldots\ldots m_n}(z_1x^{\lambda}\ldots\ldots,z_nx^{\lambda})$ मान रखने पर

$$=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\sum_{K=0}^{(\frac{V}{U})}\frac{(-V)_{UK}A(V,K)}{K!}y^k x^{\mu k}(1-x)^{vk}\sum_{k=0}^{(\frac{V}{U})}\theta_1(v,u,e,p)h^R x^{\xi R}(1-x)^{\zeta R}$$

$$\sum_{m_1,\ldots\ldots,m_n=0}^{\infty}\Omega(m_1,\ldots\ldots,m_n)\frac{z^{m_1}x^{\lambda m_1}}{m_1!}\ldots\ldots\frac{z_1^{m_n}x^{\lambda m_n}}{m_n!}dx$$

जहाँ $$\Omega(m_1,\ldots\ldots m_n)=\frac{\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{m_1\theta'_j+\ldots\ldots+m_n\theta^{(n)}_j}\prod_{j=1}^{B'}(b'_j)_{m_1\phi'_j}\ldots\prod_{j=1}^{B^{(n)}}(b^{(n)}_j)_{m_n\phi^{(n)}_j}}{\prod_{j=1}^{C}(c_j)_{m_1\Psi'_j+\ldots\ldots+m_n\Psi^{(n)}_j}\prod_{j=1}^{D'}(d'_j)_{m_1\delta'_j}\ldots\prod_{j=1}^{D^{(n)}}(d^{(n)}_j)_{m_n\delta^{(n)}_j}}$$

$$=\sum_{K=1}^{(\frac{v}{u})}\frac{(-V)_{UK}A(V,K)}{K!}y^k\sum_{k=0}^{(\frac{V}{U})}\theta_1(v,u,e,p)h^R\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}x^{\mu k}(1-x)^{vk}x^{\xi R}(1-x)^{\zeta R}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{m_1\theta'_j+\ldots\ldots+m_n\theta^{(n)}_j}\prod_{j=1}^{B'}(b'_j)_{m_1\phi'_j+\ldots\ldots}\prod_{j=1}^{B^{(n)}}(b^{(n)}_j)_{m_n\phi^{(n)}_j}}{\prod_{j=1}^{C}(c_j)_{m_1\Psi'_j+\ldots\ldots+m_n\Psi^{(n)}_j}\prod_{j=1}^{D'}(d'_j)_{m_1\delta'_j+\ldots\ldots}\prod_{j=1}^{D^{(n)}}(d^{(n)}_j)_{m_n\delta^{(n)}_j}}\frac{z_1^{m_1}x^{\lambda m_1}}{m_1!}\ldots\ldots\frac{z_1^{m_n}x^{\lambda m_n}}{m_n!}dx$$

$$=\sum_{K=0}^{(\frac{v}{u})}\frac{(-V)_{UK}A(V,K)}{K!}y^k\sum_{k=0}^{(\frac{V}{U})}\theta_1(v,u,e,p)h^R\int_0^1 x^{a+\mu k+\xi R-1}(1-x)^{b+vR+\zeta R-1}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{m_1\theta'_j+\ldots\ldots+m_n\theta^{(n)}_j}\prod_{j=1}^{B'}(b'_j)_{m_1\phi'_j+\ldots\ldots}\prod_{j=1}^{B^{(n)}}(b^{(n)}_j)_{m_n\phi^{(n)}_j}}{\prod_{j=1}^{C}(c_j)_{m_1\Psi'_j+\ldots\ldots+m_n\Psi^{(n)}_j}\prod_{j=1}^{D'}(d'_j)_{m_1\delta'_j+\ldots\ldots}\prod_{j=1}^{D^{(n)}}(d^{(n)}_j)_{m_n\delta^{(n)}_j}}\frac{z_1^{m_1}x^{\lambda m_1}}{m_1!}\ldots\ldots\frac{z_n^{m_n}x^{\lambda m_n}}{m_n!}dx$$

$$= \sum_{K=1}^{(\frac{v}{u})} \frac{(-V)_{UK} A(V,K)}{K!} y^k \sum_{k=0}^{(\frac{V}{U})} \theta_1(v,u,e,p) h^R \int_0^1 x^{\eta-1}(1-x)^{\omega-1}$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{m_1\theta'_j+\dots+m_n\theta_j^{(n)}} \prod_{j=1}^{B'}(b'_j)_{m_1\phi'_j+\dots} \prod_{j=1}^{B^{(n)}}(b_j^{(n)})_{m_n\phi_j^{(n)}}}{\prod_{j=1}^{C}(c_j)_{m_1\Psi'_j+\dots+m_n\Psi_j^{(n)}} \prod_{j=1}^{D'}(d'_j)_{m_1\delta'_j+\dots} \prod_{j=1}^{D^{(n)}}(d_j^{(n)})_{m_n\delta_j^{(n)}}} \frac{z_1^{m_1} x^{\lambda m_1}}{m_1!} \dots\dots \frac{z_1^{m_n} x^{\lambda m_n}}{m_n!} dx \quad (5.2)$$

जहाँ $\eta = a + \mu n + \xi R$ तथा $\omega = b + \vartheta k + \zeta R$ (5.3)

$$= \sum_{K=1}^{(\frac{v}{u})} \frac{(-V)_{UK} A(V,K)}{K!} y^k \sum_{k=0}^{(\frac{V}{U})} \theta_1(v,u,e,p) h^R$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{m_1\theta'_j+\dots+m_n\theta_j^{(n)}} \prod_{j=1}^{B'}(b'_j)_{m_1\phi'_j+\dots} \prod_{j=1}^{B^{(n)}}(b_j^{(n)})_{m_n\phi_j^{(n)}}}{\prod_{j=1}^{C}(c_j)_{m_1\Psi'_j+\dots+m_n\Psi_j^{(n)}} \prod_{j=1}^{D'}(d'_j)_{m_1\delta'_j+\dots} \prod_{j=1}^{D^{(n)}}(d_j^{(n)})_{m_n\delta_j^{(n)}}}$$

$$\int_0^1 x^{\eta+\lambda m_1 \dots\dots + \lambda m_n - 1}(1-x)^{\omega-1} \frac{z_1^{m_1}}{m_1!} \dots\dots \frac{z_n^{m_n}}{m_n!} dx \quad (5.4)$$

अब यूलर समाकलों तथा बीटा समाकल का भी उपयोग करने पर

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} f(x)dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \sum_n^{\infty} \frac{(a)_n C_n}{(a+b)_n} \quad (5.5)$$

जहाँ $f(x) = \sum_n^{\infty} C_n x^n$ । (5.4) (5.5) का उपयोग करने पर हमें

$$= \sum_{K=1}^{(\frac{v}{u})} \frac{(-V)_{UK} A(V,K)}{K!} y^k \sum_{k=0}^{(\frac{V}{U})} \theta_1(v,u,e,p) h^R$$

$$\frac{\prod_{j=1}^{A}(a_j)_{m_1\theta'_j+\dots+m_n\theta_j^{(n)}} \prod_{j=1}^{B'}(b'_j)_{m_1\phi'_j+\dots} \prod_{j=1}^{B^{(n)}}(b_j^{(n)})_{m_n\phi_j^{(n)}}}{\prod_{j=1}^{C}(c_j)_{m_1\Psi'_j+\dots+m_n\Psi_j^{(n)}} \prod_{j=1}^{D'}(d'_j)_{m_1\delta'_j+\dots} \prod_{j=1}^{D^{(n)}}(d_j^{(n)})_{m_n\delta_j^{(n)}}}$$

$$\frac{\Gamma(\eta)\Gamma(\omega)}{\Gamma(\eta+\omega)} \frac{(\eta)_{\lambda m_1+.........+\lambda m_n}(\omega)_{\lambda m_1+.........+\lambda m_n}}{(\eta+\omega)_{\lambda m_1+.........+\lambda m_n}(\eta+\omega+1)_{\lambda m_1+.........+\lambda m_n}}$$

$$= \frac{\Gamma(\eta)\Gamma(\omega)}{\Gamma(\eta+\omega)} \sum_{k=0}^{(\frac{V}{U})} \phi_1(k,v,u,e,p)$$

$$F^{p+\lambda:q_1;.........q_n}_{1+\lambda;m_1;.........m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):\frac{\eta}{\lambda},.........,\frac{\eta+\lambda-1}{\lambda}:(b'_{q_1});.....;(b^{(n)}_{q_n}); \\ (\alpha_1):\frac{\eta+\omega}{\lambda},.........,\frac{\eta+\omega+\lambda-1}{\lambda}:(\beta'_{m_1});.....;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix} z_1.......,z_n\right) \quad (5.6)$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$\sum_{k=0}^{(\frac{V}{U})} \theta_1(v,u,e,p) = \sum_{K=0}^{(\frac{v}{u})} \frac{(-V)_{UK} A(V,K)}{K!} y^k \sum_{k=0}^{(\frac{V}{U})} 0_1(v,u,c,p) h^K \quad (5.7)$$

अतः प्रथम समाकल सिद्ध हुआ।

शेष समाकल जिन्हें (2.5) (3.1) (3.4), (4.1) एवं (4.4) समीकरणों द्वारा दिया जाता है वे उसी विधि से उपयुक्त संशोधन परिवर्धन करके व्युत्पन्न किये जा सकते हैं जैसा कि प्रथम समाकल की उपपत्ति में दी गई है।

6. विशिष्ट दशाएँ

(i) यदि प्रथम समाकल (2.1) में हम $U=1, A(V,K)=\binom{V+\alpha}{v}\frac{(\alpha+\beta+V+1)_k}{(\alpha+1)_k}, A=1, B=0$

$q=s=m=k=0,\ 1=1$लें तो बहुपद $S^U_V[x]=P^{(\alpha'\beta)}_V[x]$ जैकोबी बहुपद तथा फलन का सार्वीकृत अनुक्रम $P^{(\alpha'\beta,0)}_n[x]=H^{(r)}_n[x,\alpha,\beta]$ गूल्ड तथा हापर के बहुपद को थोड़े से सरलीकरण के बाद हमें निम्नांकित परिणाम मिलता है -

$$= \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}.P^{\alpha,\beta}_V\left[1-2yx^{\mu}(1-x)^{v}\right].H^{(r)}_n\left[hx^{\xi}(1-x)^{\zeta}\right]$$

$$F^{p:q_1;.........q_n}_{l;m_1;.........m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):(b'_{q_1});.....;(b^{(n)}_{q_n}); \\ (\alpha_1):(\beta'_{m_1});.....;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix} z_1x^{\lambda}.......,z_nx^{\lambda}\right)dx \quad (6.1)$$

जहाँ

$$P_V^{(\alpha'\beta')}[1-2yx^{\mu}(1-x)^{v}]=\sum_{k=0}^{V}\frac{(-V)_k(\alpha'+\beta+V+1)_k}{(\alpha+1)_k}\binom{V+\alpha}{V}\left(yx^{\mu}(1-x)^{v}\right)^k$$

$$H_n^{(r)}\left[hx^{\xi}(1-x)^{\zeta}\right]=\left(-hx^{\xi}(1-x)^{\varsigma}\right)^{-n}\sum_{v=0}^{n}\sum_{u=0}^{v}\left(\beta h^r x^{r\xi}(1-x)^{r\varsigma}\right)$$

समीकरण (6.1) में $P_V^{(\alpha'\beta')}[1-2yx^{\mu}(1-x)^{v}]$ तथा $H_n^{(r)}\left[hx^{\xi}(1-x)^{\zeta}\right]$ मान रखने पर

$$=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\sum_{k=0}^{V}\frac{(-V)_k(\alpha+\beta+V+1)_k}{(\alpha+1)_k}\binom{V+\alpha}{v}y^k x^{k\mu}(1-x)^{kv}\left(-hx^{\xi}(1-x)^{\varsigma}\right)^{-n}$$

$$\sum_{v=0}^{n}\sum_{u=0}^{v}\left(\beta h^r x^{r\xi}(1-x)^{r\varsigma}\right)F^{p:q_1;\ldots\ldots;q_n}_{1;m_1;\ldots\ldots;m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):(b'_{q_1});\ldots;(b^{(n)}_{q_n});\\(\alpha_1):(\beta'_{m_1});\ldots;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix}z_1x^{\lambda}\ldots\ldots,z_nx^{\lambda}\right)dx$$

$$=\sum_{k=0}^{V}\sum_{v=0}^{n}\sum_{u=0}^{v}(\beta h^r)^v\frac{(-V)_k(\alpha'+\beta+V+1)_k}{(\alpha+1)_k}\binom{V+\alpha}{v}y^k(-h)^{-n}$$

$$\int_0^1 x^{a+k\mu+rv\xi-n\xi-1}(1-x)^{b+rv\varsigma+kv-n\varsigma-1}$$

$$F^{p:q_1;\ldots\ldots;q_n}_{1;m_1;\ldots\ldots;m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):(b'_{q_1});\ldots;(b^{(n)}_{q_n});\\(\alpha_1):(\beta'_{m_1});\ldots;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix}z_1x^{\lambda}\ldots\ldots,z_nx^{\lambda}\right)dx \qquad (6.2)$$

माना कि $\eta_4=a+k\mu+rv\xi+n\xi$ तथा $\omega_4=b+rv\varsigma+kv-n\varsigma$ (6.3)

अब समीकरण (6.2) में यूलर समाकलों को व्यवहृत करते हैं

$$=\sum_{k=0}^{V}\sum_{v=0}^{n}\sum_{u=0}^{v}(\beta h^r)^v\frac{(-V)_k(\alpha'+\beta+V+1)_k}{(\alpha+1)_k}\binom{V+\alpha'}{v}y^k(-h)^{-n}$$

$$\ldots^{-1}(1-x)^{\omega_4-1}F^{p:q_1;\ldots\ldots;q_n}_{1;m_1;\ldots\ldots;m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):(b'_{q_1});\ldots;(b^{(n)}_{q_n});\\(\alpha_1):(\beta'_{m_1});\ldots;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix}z_1x^{\lambda}\ldots\ldots,z_nx^{\lambda}\right)dx$$

अतः

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}.P_V^{\alpha,\beta}\left[1-2yx^{\mu}(1-x)^{v}\right].H_n^{(r)}\left[hx^{\xi}(1-x)^{\zeta}\right]$$

$$F^{p:q_1;.........q_n}_{1;m_1;..........m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):(b'_{q_1});.....;(b^{(n)}_{q_n}); \\ (\alpha_1):(\beta'_{m_1});....;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix} z_1x^{\lambda}.......,z_nx^{\lambda}\right)dx$$

$$=\frac{\Gamma(\eta_4)\Gamma(\omega_4)}{\Gamma(\eta_4+\omega_4)}\sum_{k=0}^{V}\sum_{v=0}^{n}\sum_{u=0}^{v}(\beta h^r)^v\frac{(-V)_k(\alpha'+\beta+V+1)_k}{(\alpha+1)_k}\left(\frac{V+\alpha'}{v}\right)y^k(-h)^{-n}$$

$$F^{p+\lambda:q_1;.........q_n}_{1+\lambda;m_1;..........m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):\frac{\eta_4}{\lambda},..................,\frac{\eta_4+\lambda-1}{\lambda}:(b'_{q_1});.....;(b^{(n)}_{q_n}); \\ (\alpha_1):\frac{\eta_4+\omega_4}{\lambda},..........,\frac{\eta_4+\omega_4+\lambda-1}{\lambda}:(\beta'_{m_1});....;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix} z_1.......,z_n\right) \quad (6.4)$$

जहाँ निम्नांकित प्रतिबन्धों को भी तुष्ट मान लिया जाता है।

(xix) $Re(a,b,r)\rangle 0, Re(\eta_4,\omega_4)\rangle 0$

(xx) $Min(\mu,v,\theta,\lambda,\xi,\zeta,p,q_j)\geq 0(j=1,2,........,n)$ (एकसाथ सभी शून्य नहीं)

(xxi) (a) $\mu\geq, v\geq 0, \Delta_1\rangle 0, \Delta_2\rangle 0$ (b) $\mu\langle 0, v\langle 0, \Delta_1+\mu[V/U]\rangle 0, \Delta_2+v[V/U]\rangle 0$

(c) $\mu\geq, v\langle 0, \Delta_1\rangle 0, \Delta_2+v[V/U\rangle 0$ (d) $\mu\langle 0, v\geq 0, \Delta_1+\mu[V/U]\rangle 0, \Delta_2\rangle 0$

जहाँ $\Delta_1 = Re(a)+\xi\left\{(1(m+n)+p+\sum_{j=1}^{n}q_j\right.$ (6.5)

$$\Delta_2 = Re(a)+\xi\left\{(1(m+n)+p+\sum_{j=1}^{n}q_j\right.$$

(ii) (3.1) में $A(V_1,k_1;......;V_r,k_r)=\frac{(\alpha+1)_{V_1+......+V_r}}{V_1!.....V_r!} X \frac{1}{(\alpha+1)_{\mu k_1+......+\mu k_r}}$

लेने पर (μ यादृच्छिक है) तथा तृतीय समाकल (3.1) में $U_i(i=1,....r), S^{U_1,......,U_r}_{V_1,......,V_r}[x_1,..........,x_r]$

समानीत होता है बहुपद $L^{\alpha,\mu}_{V_1,\ldots\ldots,V_r}(x_1,\ldots\ldots\ldots,x_r)$ में जो कई चरों में सार्वीकृत लागैर बहुपद है जिसका अध्ययन एर्डेल्यी[5] द्वारा किया गया है और परिणाम (3.1) निम्नांकित रूप धारण करता है -

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}.S^{U_1,\ldots\ldots\ldots,U_r}_{V_1,\ldots\ldots\ldots,V_r}\left[y_1x^{\mu_1}(1-x)^{v_1},\ldots\ldots\ldots,y_rx^{\mu_r}(1-x)^{v_r}\right]$$

$$F^{p:q_1;\ldots\ldots\ldots;q_n}_{l;m_1;\ldots\ldots\ldots;m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):(b'_{q_1});\ldots\ldots;(b^{(n)}_{q_n});\\(\alpha_1):(\beta'_{m_1});\ldots;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix}z_1x^{\lambda}\ldots\ldots,z_nx^{\lambda}\right)dx$$

$$=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}.L^{\alpha,\mu}_{V_1,\ldots\ldots\ldots V_r}\left[y_1x^{\mu_1}(1-x)^{v_1},\ldots\ldots\ldots,y_rx^{\mu_r}(1-x)^{v_r}\right]$$

$$F^{p:q_1;\ldots\ldots\ldots;q_n}_{l;m_1;\ldots\ldots\ldots;m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):(b'_{q_1});\ldots\ldots;(b^{(n)}_{q_n});\\(\alpha_1):(\beta'_{m_1});\ldots;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix}z_1x^{\lambda}\ldots\ldots,z_nx^{\lambda}\right)dx$$

जहाँ

$$L^{\alpha,\mu}_{V_1,\ldots\ldots V_r}\left[y_1x^{\mu_1}(1-x)^{v_1},\ldots\ldots\ldots,y_rx^{\mu_r}(1-x)^{v_r}\right]=\sum_{k_1=0}^{(\frac{V_1}{U_1})}\cdot\cdot\sum_{k_r=0}^{(\frac{V_r}{U_r})}(-V_1)_{U_1k_1}\ldots(-V_r)_{U_rk_r}\frac{(\alpha+1)_{v_1+\ldots\ldots+v_r}}{V_1!\ldots\ldots\ldots V_r!}$$

$$\frac{1}{(\alpha+1)_{\mu k_1+\ldots\ldots+\mu k_r}}\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{y^{k_1}}{k_1!}x^{\mu_i}(1-x)^{v_i}\right)$$

(6.5) तथा (6.6) का उपयोग करने पर हमें प्राप्त होता है -

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\sum_{k_1=0}^{V_1}\cdot\cdot\sum_{k_r=0}^{V_r}(-V_1)_{U_1k_1}\ldots(-V_r)_{U_rk_r}\frac{(\alpha+1)_{v_1+\ldots\ldots+v_r}}{V_1!\ldots.V_r!(\alpha+1)_{\mu\kappa_1+\ldots\ldots+\mu\kappa_r}}\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{y^{k_1}}{k_1!}x^{\mu_i}(1-x)^{v_i}\right)$$

$$F^{p:q_1;\ldots\ldots\ldots;q_n}_{l;m_1;\ldots\ldots\ldots;m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):(b'_{q_1});\ldots\ldots;(b^{(n)}_{q_n});\\(\alpha_1):(\beta'_{m_1});\ldots;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix}z_1x^{\lambda}\ldots\ldots,z_nx^{\lambda}\right)dx$$

$$=\sum_{k_1=0}^{V_1}\cdot\cdot\sum_{k_r=0}^{V_r}(-V_1)_{U_1k_1}\ldots(-V_r)_{U_rk_r}\frac{(\alpha+1)_{v_1+\ldots\ldots+v_r}}{V_1!\ldots.V_r!(\alpha+1)_{\mu\kappa_1+\ldots\ldots+\mu\kappa_r}}\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{y^{k_1}}{k_1!}x^{\mu_i}(1-x)^{v_i}\right)$$

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\prod_{i=1}^{r}\left(x^{\mu_i}(1-x)^{v_i}\right)F^{p:q_1;\ldots\ldots\ldots;q_n}_{l;m_1;\ldots\ldots\ldots;m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):(b'_{q_1});\ldots\ldots;(b^{(n)}_{q_n});\\(\alpha_1):(\beta'_{m_1});\ldots;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix}z_1x^{\lambda}\ldots\ldots,z_nx^{\lambda}\right)dx$$

माना कि $\eta_5 = a + \prod_{i-1}^{r} \mu_i$ तथा $\omega_5 = b + \prod_{i-1}^{r} V_i$ अब यूलर समाकलों का उपयोग करते हैं तो

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}.L^{\alpha,\mu}_{V_1,\ldots\ldots V_r}\left[y_1 x^{\mu_1}(1-x)^{v_1},\ldots\ldots\ldots,y_r x^{\mu_r}(1-x)^{v_r}\right]$$

$$F^{p:q_1;\ldots\ldots\ldots q_n}_{1;m_1;\ldots\ldots\ldots m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):(b'_{q_1});\ldots;(b^{(n)}_{q_n});\\(\alpha_1):(\beta'_{m_1});\ldots;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix} z_1 x^{\lambda}\ldots\ldots,z_n x^{\lambda}\right)dx$$

$$=\frac{\Gamma(\eta_5)\Gamma(\omega_5)}{\Gamma(\eta_5+\omega_5)}\sum_{k_1=0}^{V_1}\cdots\sum_{k_r=0}^{V_r}(-V_1)_{U_1k_1}\ldots(-V_r)_{U_rk_r}\frac{(\alpha+1)_{v_1+\ldots\ldots+v_r}}{V_1!\ldots V_r!(\alpha+1)_{\mu\kappa_1+\ldots\ldots+\mu\kappa_r}}\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{y^{k_1}}{k_1!}x^{\mu_i}(1-x)^{v_i}\right)$$

$$F^{p+\lambda:q_1;\ldots\ldots\ldots q_n}_{1+\lambda;m_1;\ldots\ldots\ldots m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):\frac{\eta_5}{\lambda},\ldots\ldots\ldots\ldots,\frac{\eta_5+\lambda-1}{\lambda}:(b'_{q_1});\ldots;(b^{(n)}_{q_n});\\(\alpha_1):\frac{\eta_5+\omega_5}{\lambda},\ldots\ldots\ldots,\frac{\eta_5+\omega_5+\lambda-1}{\lambda}:(\beta'_{m_1});\ldots;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix} z_1\ldots\ldots,z_n\right)$$

जहाँ निम्नांकित प्रतिबन्धों को भी तुष्ट हुआ मान लिया गया है

(xxii) $Re(a,b,r)\rangle 0, Re(\eta_5,\omega_5)\rangle 0$

(xxiii) $Min(\mu_i,\nu,\theta,\lambda,\xi,\zeta,p,q_j)\ge 0 (j=1,2,\ldots\ldots,n)$ (एकसाथ सभी शून्य नहीं)

(xxiv) $(a)\mu\ge,\nu\ge 0,\Delta_1\rangle 0,\Delta_2\rangle 0 (b)\mu\langle 0,\nu\langle_0,\Delta_1+\mu[V/U]\rangle 0,\Delta_2+\nu[V/U]\rangle 0$

$(c)\mu\ge,\nu\langle 0,\Delta_1\rangle 0,\Delta_2+\nu[V/U)\rangle 0 (d)\mu\langle 0,\nu\ge 0,\Delta_1+\mu[V/U]\rangle 0,\Delta_2\rangle 0$

$$\Delta_1 = Re(a)+p+\sum_{j=1}^{n}q_j \qquad (6.8)$$

$$\Delta_2 = Re(a)+p+\sum_{j=1}^{n}q_j$$

अतः हम सिद्ध करते हैं कि

(iii) यदि हम मान लें

$$\phi A(V_i,k_i;\ldots;V_rk_r)\frac{\prod_{l=1}^{A'}(a'_l)_{\phi_l^{(1)}k_1+\ldots\ldots+\phi_l^{(r)}k_r}\prod_{l=1}^{C^{(1)}}(u_j^{(1)})_{\mu_l^{(1)}k_1}\ldots\prod_{l=1}^{C^{(r)}}(u_l^{(r)})_{\mu_l^{(r)}k}}{\prod_{l=1}^{B'}(b'_l)_{\psi_l^{(1)}k_1+\ldots\ldots+\psi_l^{(r)}k_r}\prod_{l=1}^{D^{(1)}}(V_l^{(1)})_{(v_l^{(1)})_{v_l^{(1)}k_1}}\ldots\prod_{l=1}^{D^{(r)}}(v_l^{(r)})_{v_l^{(r)}k_r}}$$

पाँचवे समाकल (4.1) में $S_V^{U_1 \cdots\cdots U_r}[x_1, \ldots\ldots, x_r]$ समानीत होकर श्रीवास्तव तथा डाउस्ट के सार्वीकृत लारीसेला फलन का रूप धारण करता है जो निम्नवत् है

$$S_V^{U_1 \cdots\cdots U_r}[x_1, \ldots\ldots, x_r] = F^{A'+1:\, C^{(1)}, \ldots\ldots, C^{(r)}}_{B':\, D^{(1)}, \ldots\ldots, D^{(r)}} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\left| \begin{matrix} (V_1, U_1, \ldots, U_r), (a_1 : \phi_1^{(1)}, \ldots, \phi_1^{(r)})_{1,A'} : (u_1^{(1)}, \mu_1^{(1)})_{1,C^{(1)}} \cdots (u_1^{(r)}, \mu_1^{(r)})_{1,C^{(1)}} \\ (b_1' : \varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_1^{(r)})_{1,B'} : (u_1^{(1)}, \mu_1^{(1)})_{1,C^{(1)}} \cdots (u_1^{(r)}, \mu_1^{(r)})_{1C^{(1)}} \end{matrix} \right]$$

और हमें आसानी से निम्नांकित समाकल प्राप्त हो जाता है -

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} F\left[y_1 x^{\mu_1}(1-x)^{v_1}, \ldots\ldots, y_r x^{\mu_r}(1-x)^{v_r}\right]$$

$$F^{p:q_1; \cdots\cdots q_n}_{1;m_1; \cdots\cdots m_n}\left(\begin{matrix} (a_p):(b'_{q_1}); \ldots; (b^{(n)}_{q_n}); \\ (\alpha_l):(\beta'_{m_l}); \ldots; (\beta^{(n)}_{m_n}); \end{matrix} z_1 x^{\lambda} \ldots\ldots, z_n x^{\lambda} \right) dx$$

$$= \int_0^1 x^{a+\sum_i^r \mu_i - 1}(1-x)^{b+\sum_i^r v_i - 1} \sum_{k_1, \ldots\ldots, k_r = 0}^{U_1 k_1 + \cdots\cdots U_r k_r \le V} (-V)_{U_1 k_1 + \cdots U_r k} \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{y_i^{k_i}}{k_i!} \right)$$

$$\frac{\prod_{l=1}^{A'} (a'_l)_{\phi_1^{(1)} k_1 + \cdots\cdots + \phi_1^{(r)} k_r} \prod_{l=1}^{C^{(1)}} (u_j^{(1)})_{\mu_1^{(1)} k_1} \cdots\cdots \prod_{l=1}^{C^{(r)}} (u_l^{(r)})_{\mu_1^{(r)} k_r}}{\prod_{l=1}^{B'} (b'_l)_{\psi_1^{(1)} k_1 + \cdots\cdots + \psi_1^{(r)} k_r} \prod_{l=1}^{D^{(1)}} (V_l^{(1)})_{(v_1^{(1)})_{v_1^{(1)} k_1}} \cdots\cdots \prod_{l=1}^{D^{(r)}} (v_l^{(r)})_{v_1^{(r)} k_r}}$$

$$F^{p:q_1; \cdots\cdots q_n}_{1;m_1; \cdots\cdots m_n}\left(\begin{matrix} (a_p):(b'_{q_1}); \ldots; (b^{(n)}_{q_n}); \\ (\alpha_l):(\beta'_{m_l}); \ldots; (\beta^{(n)}_{m_n}); \end{matrix} z_1 x^{\lambda} \ldots\ldots, z_n x^{\lambda} \right) dx$$

माना कि $\eta_6 = a + \prod_{j=1}^{r} \mu_i$ तथा $\omega_6 = b + \prod_{j=1}^{r} v_i$ अब यूलर समकलों को व्यवहृत करते हैं तो

$$\frac{\Gamma(\eta_6)\Gamma(\omega_6)}{\Gamma(\eta_6 + \omega_6)} \sum_{k_1, \ldots\ldots, k_r = 0}^{U_1 k_1 + \cdots\cdots U_r k_r \le V} (-V_1)_{U_1 k_1} \cdots (-V_r)_{U_r k_r} \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{y_i^{k_i}}{k_i!} \right)$$

$$\times \frac{\prod_{l=1}^{A'} (a'_l)_{\phi_l^{(1)}k_1+\ldots\ldots+\phi_l^{(r)}k_r} \prod_{l=1}^{C^{(1)}} (u_j^{(1)})_{\mu_l^{(1)}k_1} \ldots\ldots \prod_{l=1}^{C^{(r)}} (u_l^{(r)})_{\mu_l^{(r)}k_r}}{\prod_{l=1}^{B'} (b'_l)_{\psi_l^{(1)}k_1+\ldots\ldots+\psi_l^{(r)}k_r} \prod_{l=1}^{D^{(1)}} (V^{(1)})_{(v_l^{(1)})_{v_l^{(1)}k_1}} \ldots\ldots \prod_{l=1}^{D^{(r)}} (v_l^{(r)})_{v_l^{(r)}k_r}}$$

$$F^{p+\lambda:q_1;\ldots\ldots\ldots;q_n}_{l+\lambda;m_l;\ldots\ldots\ldots;m_n}\left(\begin{matrix}(a_p):\frac{\eta_6}{\lambda},\ldots\ldots\ldots\ldots,\frac{\eta_6+\lambda-1}{\lambda}:(b'_{q_l});\ldots;(b^{(n)}_{q_n}); \\ (\alpha_l):\frac{\eta_6+\omega_6}{\lambda},\ldots\ldots,\frac{\eta_6+\omega_6+\lambda-1}{\lambda}:(\beta'_{m_l});\ldots;(\beta^{(n)}_{m_n});\end{matrix} z_1,\ldots\ldots,z_n\right) \quad (6.11)$$

जहाँ संक्षेपण की दृष्टि में हमने $F[y_1....y_r]$ का उपयोग (6.9) के दक्षिण पक्ष में दिये गये लारिसेला फलन को सूचित करने के लिए किया है जहाँ निम्नांकित प्रतिबन्धों को भी तुष्ट हुआ मान लिया जाता है।

(xxv) $Re(a,b,r)>0, Re(\eta_2,\omega_2)>0$

(xxvi) $Min(\mu,v,\theta,\lambda,\xi,\zeta,p,q_j)\geq 0 (j=1,2,\ldots\ldots\ldots,n)$ (एकसाथ सभी शून्य नहीं)

(xxvii) (a) $\mu\geq 0, v\geq 0, \Delta_1>0, \Delta_2>0$

(b) $\mu<0, v<_0, \Delta_1>0, \Delta_2+v[V/U]>0$

(c) $\mu\geq 0, v<0, \Delta_1>0, \Delta_2+v[V/U>0$

(d) $\mu<0, v\geq 0, \Delta_1+\mu[V/U]>0, \Delta_2+v_2>0$

$$\Delta_1 = Re(a)+p+\sum_{j=1}^{n} q_j \quad (6.12)$$

$$\Delta_2 = Re(a)+p+\sum_{j=1}^{n} q_j$$

निर्देश

1. चटर्जी, एस. के. : C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B 268, A 600-A602.

2. ढिल्लों,एस.एस. : पी-एच. डी. थीसिस, बुन्देलखण्ड विश्वविद्यालय (1989)

3. गूल्ड, एच. डब्लू. तथा हापर, ए. टी. : Duke Math. J. 1962 29, 51-63.

4. कैम्पे द फेरी, जै. : C. R. Acad. Sci. Paris 1921 173, 401-404.

5. कार्लसन, पी. डब्लू. : Math Scand. 1973(4), 63, 265-268.

6. क्राल, ए. एल. तथा फ्रिक, ओ. : Trans.Amer. Math. Soc. 1949 65--, 110-115.

7. सिंह, ए. के. : पी-एच. डी. थीसिस, बुन्देलखण्ड विश्वविद्यालय (1981).

8. श्रीवास्तव, एच. एम. : Math. Vesnik. 1972, 9 (24), 101-107.

9. वही : Boll. Un. Mat. Ital. 1981 (5) 18A, 138-143.

10. वही : Pacific J. Math. 1985, 117. 183-191.

11. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा दाओस्ट, एम. सी. : Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 72 Indag. Math 1969, 31, 449-457.

12. श्रीवास्तव, एम. एम. तथा गर्ग, एम. : Rev. Roumaine Physc. 1987, 32, 685-692.

13. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा पंडा, आर. : J. Reine Angew. Math. 1976, 283/284, 265-274.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 3, July 2003

कतिपय ऐल्कलायडों से अनुप्रभावित निमज्जित लैक्टिक अम्ल किण्वन

बीरेन्द्र सिंह तथा एस. पी. सिंह

रसायन विभाग, मगध विश्वविद्यालय, बोधगया (बिहार)

[प्राप्त - अक्टूबर 16, 2002]

सारांश

लैक्टोबैसिलस बल्गैरिकस BS-18 द्वारा निमज्जित लैक्टिक अम्ल किण्वन पर नार्सीन हाइड्रोक्लोराइड तथा सिनकोनिडीन नामक दो ऐल्कलायडों के प्रभाव का अध्ययन किया गया। यह पाया गया कि दोनों ही ऐल्कलायड जब इष्टतम सान्द्रताओं में उपस्थित रहते हैं तो सुक्रोस के लैक्टिक अम्ल जैव रूपान्तर को थोड़ा सा बढ़ा देते हैं।

Abstract

Studies on submerged lactic acid fermentation exposed to some alkaloids. *By* Birendra Singh and S.P. Singh, Department of Chemistry Magadh University, Bodh-Gaya (Bihar).

The influence of narceine hydrochloride and cinchonidine alkaloids were studied on submerged lactic acid fermentation by lactobacillus bulgaricus BS-18. It has been found that both the alkaloids used slightly enhanced bioconversion of sucrose to lactic acid when present in their optimum concentrations.

सूक्ष्मजीवों तथा किण्वन प्रक्रमों पर ऐल्कलायडों के प्रभाव को लेकर व्यापक अध्ययन नहीं हुआ है [1] क्योंकि ऐल्कलायडों की प्रकृति विषैली होती है। फिर भी सोमोगली [2] ने सूचित किया है कि क्विनीन तथा एट्रोपीन की लेश मात्राएँ यीस्टों की वृद्धि को त्वरित करने वाली हैं । वलाइमर[3] ने अनेक सूक्ष्मजीवों पर कैफीन की संदमक क्रिया की सूचना दी है। कैफीन को जैव प्रक्रमों में अत्यन्त प्रभावशाली रसायन पाया गया है [4-6]। चूँकि कतिपय किण्वन प्रक्रमों में कुछ ऐल्कलायड उत्पन्न होते हैं अतः स्पष्ट है कि किण्वन प्रक्रमों में भाग लेने वाले जीवों के प्रति वे विषैले नहीं हैं [7-10]। सिंह इत्यादि ने भी [11-13] लैक्टिक किण्वन अम्ल

किण्वन के सन्दर्भ में ऐल्कलायडों के कई समूहों के प्रभावों का अध्ययन करते हुए पाया कि निम्नतर सान्द्रताओं में वे किण्वन प्रक्रमों के लिए लाभप्रद हैं ।

इस प्रपत्र में शर्करा के लैक्टिक अम्ल जैव रूपान्तर में एल. बुल्गैरिकस BS-18 की भूमिका का अध्ययन किया गया है। इसमें कतिपय ऐल्कलायडों का प्रयोग करते हुए 48° से. ताप तथा 6.2 पी. एच. पर 5 दिन की इन्क्यूबेशन अवधि रखी गई है ।

प्रयोगात्मक

माध्यम : 100 मि. ली. में प्रत्येक किण्वक फ्लास्क में उत्पाद माध्यम का संघटन इस प्रकार था -

सुक्रोस : 10.5% माल्ट-निष्कर्ष 0.375% ; $(NH_4)_2 HPO_4$: 0.25% $CaCO_3$: 10.185%

आसुत जल : 100 मि. ली. बनाने के लिए पी. एच. 6.2, ताप : 48° C

निर्जीवीकरण : वृद्धि तथा उत्पादन माध्यमों को 15 पौंड भाप दाब पर 30 मिनट तक आटोक्लेब में निर्जीवित किया गया।

स्ट्रेन : प्रस्तुत अध्ययन के लिए लैक्टो बैसिलस बुल्गैरिकस BS-18 का प्रयोग किया गया। यह स्ट्रेन एन. सी. एल. पुणे से प्राप्त किया गया।

परीक्षण विधियाँ : प्रयोग के अन्तर्गत उत्पन्न लैक्टिक अम्ल तथा बची हुई सुक्रोस मात्रा को रंगमापी विधि से ज्ञात की गई[14,15]।

इनक्यूबेशन अवधि : 4, 5 तथा 6 दिन

इष्टतम इनक्यूबेशन अवधि : 5 दिन

इनाकुलम की आयु : 48 घंटा पुराना

इनाकुलम की मात्रा : BS-18 का 0.5 मिली. जीवाणविक निलम्बन

प्रयुक्त ऐल्कलॉयड की सान्द्रता : संगत ऐल्कलयडों की मोलर सान्द्रता 1.0×10^{-5}M से लेकर 1.0×10^{-5}M तक थी।

परिणाम तथा विवेचना

सारणी में दिये गये परिणामों से स्पष्ट होता है कि नार्सीन हाइड्रोक्लोराइड ऐल्कालॉयड की निम्नवत् सान्द्रताओं का सुक्रोस के लैक्टिक अम्ल में जैवरूपान्तर पर उद्दीपक प्रभाव पड़ता है। लैक्टिक अम्ल की उच्चतम प्राप्ति 2.0×10^{-5}M सान्द्रता पर देखी गई। यह ऐल्कलॉयड की सान्द्रता बढ़ाने पर जैव रूपान्तर पर कोई उल्लेखनीय प्रभाव नहीं हुआ। इससे यह सिद्ध होता है कि यद्यपि मार्सीन हाइड्रोक्लोराइड अत्यधिक विषाक्त ऐल्कालॉयड

है किन्तु यह सुक्रोस के लैक्टिक अम्ल के जैवरूपान्तर में उपयोगी है। इससे कंट्रोल की तुलना में अधिक लैक्टिक अम्ल प्राप्त हुआ।

सारणी – 1

एल. बुल्गैरिकस BS-18 द्वारा लैक्टिक अम्ल किण्वन पर कतिपय ऐल्कलायडों का प्रभाव

ऐल्कलायडों की सान्द्रता M/1000	इनक्यूबेशन अवधि (दिन)	लैक्टिक अम्ल की प्राप्ति		अकिण्वित शर्करा	5 दिनों में लैक्टिक अम्ल में वृद्धि (%)
		g/100 ml	% रूपान्तरण		
नार्सीन हाइड्रोक्लोराइड					
कंट्रोल	5	6.970	75.612	1.282	-
1.0×10^{-5}M	5	7.357	76.579	0.893	(+) 5.58106
2.0×10^{-5}M	5	7.571	77.097	0.680	(+) 8.62266
3.0×10^{-5}M	5	7.247	76.332	1.006	(+) 3.97417
4.0×10^{-5}M	5	6.996	75.656	1.253	(+) 0.373.2
5.0×10^{-5}M	5	6.987	75.657	1.2654	(+) 0.24390
सिनकोनिडीन					
कंट्रोल	5	6.975	75.585	1.272	-
1.0×10^{-5}M	5	6.987	75.600	1.258	(+) 0.17204
2.0×10^{-5}M	5	7.113	75.953	1.135	(+) 1.97849
3.0×10^{-5}M	5	7.214	76.185	1.031	(+) 3.42652
4.0×10^{-5}M	5	7.008	75.664	1.238	(+) 0.47311
5.0×10^{-5}M	5	6.984	75.600	1.262	(+) 0.12903

* प्रत्येक मान तीन प्रयोगों का माध्य है।

(+) लैक्टिक अम्ल की प्राप्ति में % वृद्धि । प्रयोगात्मक विचरण $\pm$ 2.5 - 3%

सिनकोनिडीन की उपस्थिति से सुक्रोस के लैक्टिक अम्ल जैवरूपान्तर पर कोई दृश्य प्रभाव नहीं पड़ता। सिनकोनिडीन की 3.0×10^{-5}M सान्द्रता पर लैक्टिक अम्ल का उत्पादन उच्चतम था जो कि किण्वनीय सुक्रोस के आधार पर 76.18% है । इस तरह इष्टतम सान्द्रता पर 0.6% अधिक लैक्टिक अम्ल उत्पन्न हो सका। यह ध्यान देना रुचिकर होगा कि सुक्रोस की समस्त सान्द्रताओं पर लैक्टिक अम्ल में इसके जैवरूपान्तर के लिए सिनकोनिडीन की उपस्थिति लाभप्रद रही ।

निर्देश

1. पोर्टर, जे. आर. : Bacterial Chemistry and Physiology, John Wiley & Son. New Delhi (1970).
2. सोमाग्ली, आर. : Intern, Z Physik Chem. Biol. 1916, 2, 416.
3. क्लाइघर, आई. जे. : J. Exptl.Med. 1918, 27, 463.
4. सिंह, एस. सी., सिंह, वी. के., प्रसाद, सी. डी. तथा सुरैया, ए. : Columban J. Life Sci 1993, 1, 31.
5. तिवारी, के. पी. तथा सिंह एस. पी. : Zbl. Bakt. II Abstract 1980,135, 328.
6. तिवारी, के. पी. तथा पाण्डेय, ए. : Zbl. Bakt. II Abstract 1979,134, 748.
7. रामकृष्णन,टी. एस. तथा थामस, के. एम. : Madras Agric. J., 1942, 30, 441.
8. मुरदराजन, डी., रामकृष्णन, टी. एस., कृष्णमेनन, के. तथा श्रीनिवासन, के. वी. : Proc. Indian Acad. Sci. 1950, 31(B), 103.
9. साहा, जे. सी. तथा भट्टाचार्जी, एस. के. : Nature, 1945, 156, 363.
10. शास्त्री, के. एस. एम., पंडोत्रा, वी. आर. आदि : Indian Acad.Sci. 1970, 72(B), 99.
11. सिंह, एस. पी., कुमार, एल. तथा राठोर,एन. : Biojournal 1991, 3, 367.
12. सिंह, एस. पी., पाण्डेय, एस. के. आदि : Asian J. Chem. 1994, 6, 661.
13. सिंह, एस. पी., सामदानी, जी., दुबे, जे. के. तथा मुहम्मद शमीम : Asian J. Chem. 1996, 8, 571.
14. बार्कर, एस. बी. तथा समरसन, डब्लू. एच. : J. Biol. Chem.1941, 138, 525.
15. डुबॉस, एम., गिलेस, के. ए., हैमिल्टन, जे. के., रेबर्स, पी. ए. तथा स्मिथ, एफ. : Anal Chem 1956, 28, 350.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 3, July 2003

ऋतु परिवर्तन के साथ चन्ना पंक्टैटस मछली के गर्भाशय का जैवरासायनिक संघटन

शकुन्तला शुक्ला, उमेश शुक्ला, गिरिजेश शुक्ला तथा

राजकिशोर सिंह बघेल

प्राणिशास्त्र विभाग, गवर्नमेंट माडल साइंस कालेज, रीवाँ (म. प्र.)

[प्राप्त - नवम्बर 14, 2002]

सारांश

विभिन्न ऋतुओं में चन्ना पंक्टैटस मछली के गर्भाशय का जैवरासायनिक संघटन बदलता रहता है। यथा जल, प्रोटीन तथा ग्लाइकोजन की मात्रा और अंडजनन ऋतु में सीधा समानुपात है जबकि वसा व्युत्क्रम रीति से समानुपाती है। ये परिवर्तन प्रौढ़ होने, अंडजनन तथा आहार दिये जाने जैसे विविध दैहिक तथा अन्य कारकों के कारण होते हैं।

Abstract

Seasonal changes in the biochemical composition of the ovary of an air breathing fish Channa Punctatus (B.L) Guric. *By* (Smt.) Shakuntala Shukla, Umesh Shukla, Girijesh Shukla and Ratkishor Singh Baghel, Department of Zoology, Govt. Model Science (Autonomous) College, Rewa (M.P.).

The analysis of biochemical composition of the ovary of Channa punctatus shows changes in different seasons i.e. increase in water, protein and glycogen is directly proportional to the spawning season while the fat is inversely proportional. These changes occur due to various physiological and other factors like maturation, spawning and feeding.

चूंकि चन्ना पंक्टैटस के गर्भाशय के जैवरासायनिक संघटन में ऋतुओं के अनुसार होने वाले परिवर्तनों पर अभी तक कोई अध्ययन नहीं हुआ है फलतः इस प्रपत्र में चन्ना पंक्टैटस

के अंडजनन तथा प्रौढ़ता के विषय में गर्भाशय की आर्द्रता, वसा, प्रोटीन तथा ग्लाइकोजन मात्रा में ऋतुओं के साथ होने वाले परिर्वतन को शोध विषय बनाया गया। चन्ना पंक्टैटस में अंडजनन जुलाई से लेकर सितम्बर माह तक होता है।

प्रयोगात्मक

जैवरासायनिक विश्लेषण के लिए प्रौढ़ नमूनों पर विचार किया गया। चन्ना पंक्टैटस को रीवां में टोंस नदी से जनवरी से दिसम्बर की अवधि में प्रति सप्ताह ताजा पकड़ लाया गया । नर तथा मादा मछलियों को विलग किया गया। फिर मछलियों को चीर कर उनके गर्भाशयों को बाहर निकाला गया।

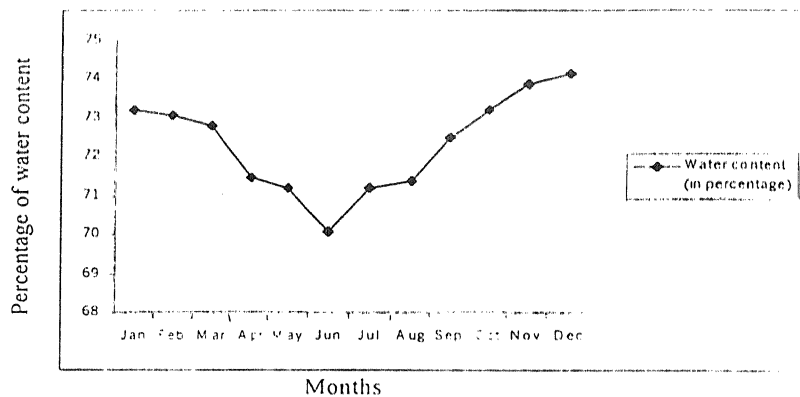
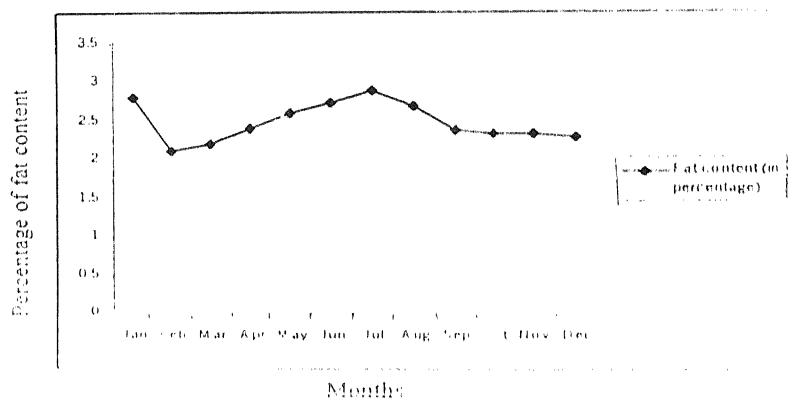
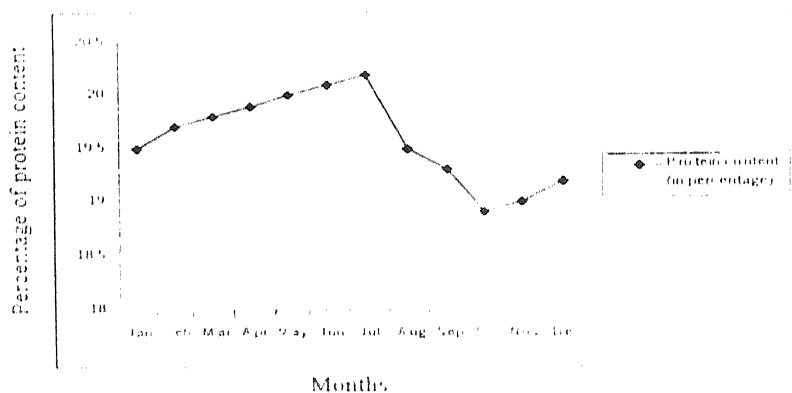
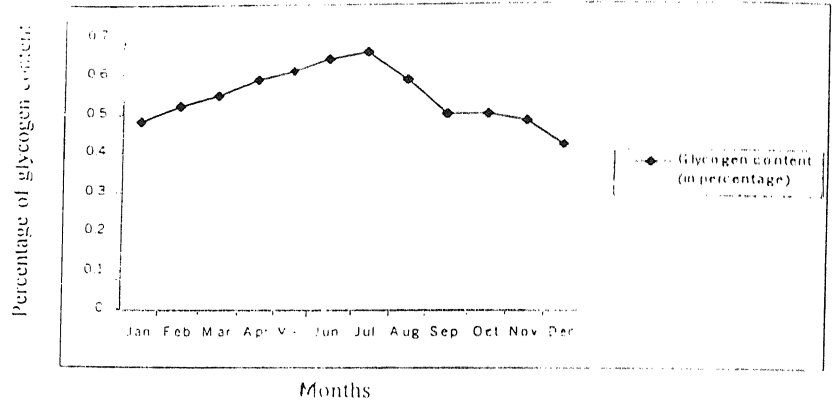
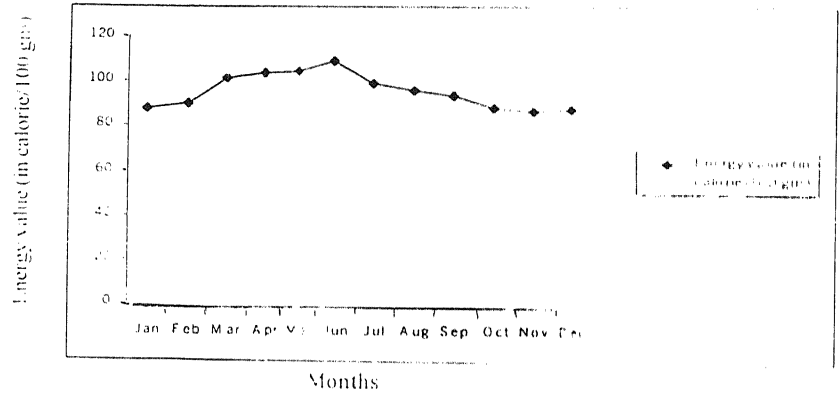
तुले हुए गर्भाशय नमूनों को एक ओवन में 80° पर सुखाया गया जब तक कि भार स्थिर नहीं हो गया । इस तरह प्रतिशत जल की मात्रा परिणित की गई । सुखाये गये नमूने की ज्ञात मात्रा लेकर साक्सलेट विधि द्वारा वसा की मात्रा निकाली गई। प्रोटीन की मात्रा गोर्नेल इत्यादि (1949) की विधि से ज्ञात की गई। ग्लाइकोजन की मात्रा केम्प तथा किट्स विधि[2] से ज्ञात की गई । वसा में उर्जा की मात्रा की गणना 9.3 कैलोरी प्रति ग्राम से गुणा करके तथा प्रोटीन और कार्बोहाइड्रेटों की गणना 4.1 से गुणा करके ज्ञात की गई।

परिणाम तथा विवेचना

वसा जल चक्र

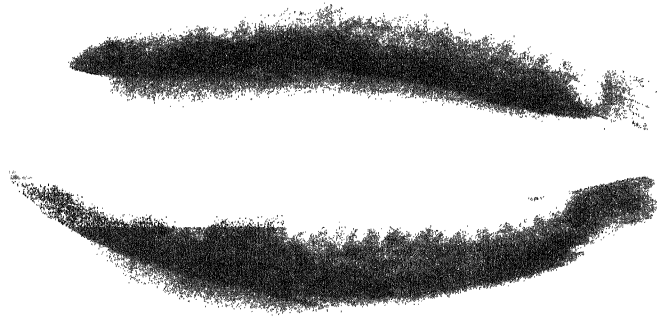
चित्र 1 में जल (आर्द्रता) का प्रतिशत दिखाया गया है जबकि वसा मात्राएँ चित्र 2 में दर्शित हैं। जल की मात्रा 70.09 (जुलाई में) से लेकर 74.14 (दिसम्बर में) के मध्य परिवर्तित होती है। जल की प्रतिशतता जुलाई से दिसम्बर तक क्रमशः बढ़ती है जो कि मछली की अंडजनन ऋतु है। जल की प्रतिशतता में जनवरी से दिसम्बर तक उतार देखा जाता है। इसी तरह गर्भाशय में वसा की प्रतिशतता 2.8 (जनवरी में) तथा 2.90 (जुलाई में) के मध्य पाई गई। वसा की प्रतिशतता अगस्त से लेकर दिसम्बर तक घटती जाती है और जनवरी से जुलाई तक धीरे-धीरे बढ़ती है। इसका कारण जननग्रंथियों (Gonads) के प्रौढ़ होने के दौरान वसा का संचय है ।जननग्रंथियों में वसा की मात्रा जननग्रंथियों के प्रौढ़ होने के दौरान बढ़ती है ।

प्रोटीन चक्र

गर्भाशयों में प्रोटीन प्रतिशत 18.9 (अक्टूबर माह में) से 20.02 (जुलाई में) के मध्य परिर्वतित होता है। नवम्बर से लेकर जुलाई तक गर्भाशय प्रोटीन मात्रा क्रमशः बढ़ती जाती है। उच्चतम प्रतिशतता जुलाई में देखी जाती है जो प्रौढ़ होने का शीर्षकाल भी होता है (चित्र 3)।

चित्र -1 चन्ना पंक्टैटस के गर्भाशयों में जल की मात्रा में होने वाले मासिक परिवर्तन

चित्र -2 चन्ना पंक्टैटस के गर्भाशयों में प्राप्त वसा मात्रा में होने वाले मासिक परिवर्तन

चित्र -3 चन्ना पंक्टैटस के गर्भाशयों में प्राप्त प्रोटीन मात्रा में होने वाले मासिक परिवर्तन

चित्र - 4 चन्ना पंक्टैटस के गर्भाशयों में ग्लाइकोजन मात्रा में होने वाले मासिक परिवर्तन

चित्र - 5 चन्ना पंक्टैटस के गर्भाशयों में ऊर्जा मानों म होने वाले मासिक परिवर्तन

ग्लाइकोजन चक्र

गर्भाशय में ग्लाइकोजन की प्रतिशतता दिसम्बर में 0.42 से लेकर जुलाई में 0.66 के मध्य बदली। ग्लाइकोजन का सर्वाधिक संचय जुलाई में होता है जो कि प्रौढ़ होने की अवधि है। गर्भाशय में ग्लाइकोजन की मात्रा जुलाई से सितम्बर तक घटती जाती है जो कि अंडजनन (spawning) अवधि है ।(चित्र 4) ।

चित्र 5 से चन्ना पंक्टैटस के कैलोरी मान दिये गये हैं । ये 100 ग्राम ताजे गर्भाशय के लिए परिगणित किये गये हैं। ऊर्जा मात्रा की गणना वसा, प्रोटीन तथा ग्लाइकोजन के ज्ञात मानों से परिगणित किये गये। गर्भाशय में सर्वोच्च कैलोरी मान 109.09 कैलोरी प्रति 100 ग्राम पाया गया।

चन्ना पंक्टैटस मछली

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकगण प्राणिविज्ञान विभाग के अध्यक्ष प्रो० एल० पी० शर्मा तथा गवर्नमेंट माडल साइंस कालेज रीवाँ के प्रिंसिपल डॉ० वाई० वी० शुक्ला के आभारी हैं जिन्होंने शोध सुविधाएँ प्रदान की। लेखकगण गवर्नमेंट माडल साइंस कालेज रीवाँ के प्राणि विज्ञान विभाग के सहायक प्रोफेसर श्री आर० के० सिंह के भारी आभारी हैं।

निर्देश

1. [illegible] : Broteria, 1968, 36, 29-44.
2. [illegible] : Biochem. J. 1954, 56, 646-648.
3. [illegible] : Biochem. J. 1988, 3, 336-390.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 46, No. 3, July 2003

Cu^{2+} का जिंक ग्लूटामेट डाइहाइड्रेट में इलेक्ट्रान प्रचक्रण अनुनाद

राम कृपाल तथा एम. पी. यादव

भौतिकी विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त - फरवरी 10, 2003]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में Cu^{2+} आयनों का जिंक ग्लूटामेट डाइहाइड्रेट यौगिक में इलेक्ट्रान प्रचक्रण अनुनाद वर्णक्रम का अध्ययन प्रस्तुत किया गया है । इस वर्णक्रम के आधार पर विभिन्न स्पिन हैमिल्टोनियन प्राचलों (spin Hamiltonian parameters) g_x, g_y, g_z, A_x, A_y, A_z को प्रायोगिक रूप में ज्ञात किया गया है तथा g एवं A प्राचलों का कोणीय परिवर्तन ग्राफ की सहायता से दिखाया गया है। ग्राफ में विभिन्न क्षेत्रों तथा उनमें रेखाओं की संख्या एवं उनके महत्व की व्याख्या करने की कोशिश की गयी है।

Abstract

ESR of Cu^{2+} doped zinc glutamate dihydrate. *By* Ram Kripal and M.P. Yadav, Physics Department, Allahabad University, Allahabad.

In the present paper the ESR study of the Cu^{+2} doped zinc glutamate dihydrate has been reported. The various spin Hamiltonian parameters g_x, g_y, g_z, A_x, A_y, A_z have been estimated. Also the crystal field symmetry has been studied.The angular variation graph of g^2 vs θ and k^2 vs θ has been presented. An attempt has been made to explain the various sites and number of lines of the ESR spectra.

इलेक्ट्रान प्रचक्रण अनुनाद विधि से अनुचुम्बकीय आयनों की मूल अवस्था तथा धातु आयनों के चारों ओर वैद्युत क्षेत्र सममिति की प्रकृति को जाना जा सकता है। Cu^{2+} मिश्रित अशुद्धता को विभिन्न आतिथेय (Host) जालकों के परिपेक्ष्य में अध्ययनों का उल्लेख विभिन्न शोधपत्रों [1-5] में किया जा चुका है। विशेष रूप से Cu^{2+} अशुद्धता को आयनों में ऐल्कली हैलाइड [6-10] एवं

ऐल्कली सल्फेटों [2,11,12] के रूप में वर्गीकृत किया जा सकता है।

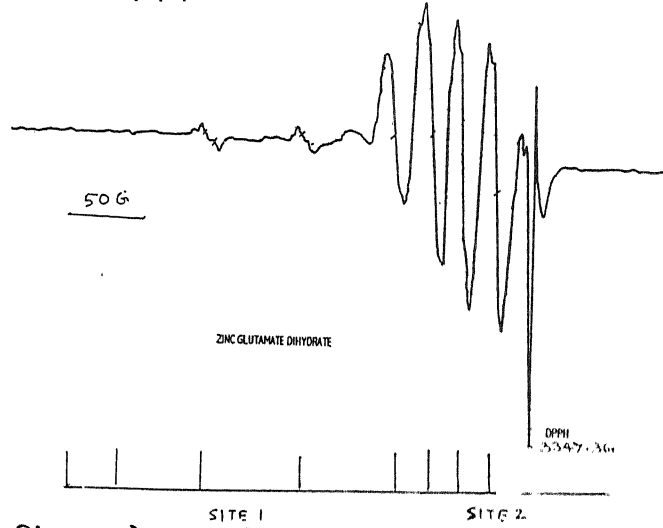
प्रस्तुत शोधपत्र में Cu^{2+} आयनों का जिंक ग्लूटामेट डाइहाइड्रेट ($ZnC_5H_7NO_4.2H_2O$) के एकल क्रिस्टलों के E.S.R अध्ययन का वर्णन किया गया है । इन एकल क्रिस्टलों की क्रिस्टलीय संरचना [13] ज्ञात है । ये क्रिस्टल विषम लम्बाक्ष (Orthorhombic) हैं तथा इनका विमीय समूह (Space Group) $P2_12_12_1$ है जबकि a = 11.190, b = 10.463 तथा c = 7.220 A° ।

चित्र -1 जिंक ग्लूटामेट डाइहाइड्रेट Cu^{2+} में Cu^{2+} का H के लिए C अक्ष के अनुदिश ESR वर्णक्रम

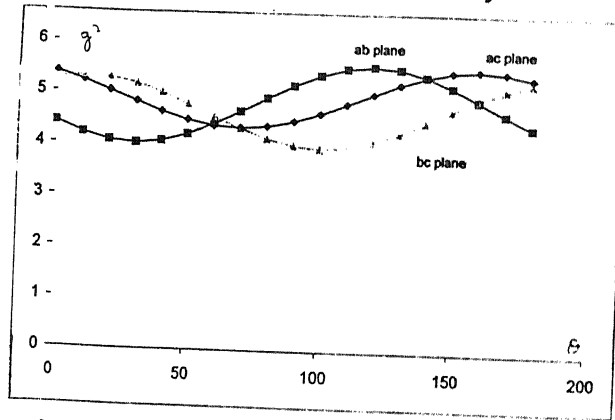
Fig.- 1 ESR spectra of Cu^{+2} doped Zinc glutamate dihydrate for H along c-axis

चित्र -2 (a) क्षेत्र 1(g^2 vsθ) जिंक ग्लूटामेट डाइहाइड्रेट क्रिस्टल में Cu(II) के ab, bc, तथा ca तलों में घूर्णन के लिये ESR वर्णक्रम का कोंणीय परिर्वतन

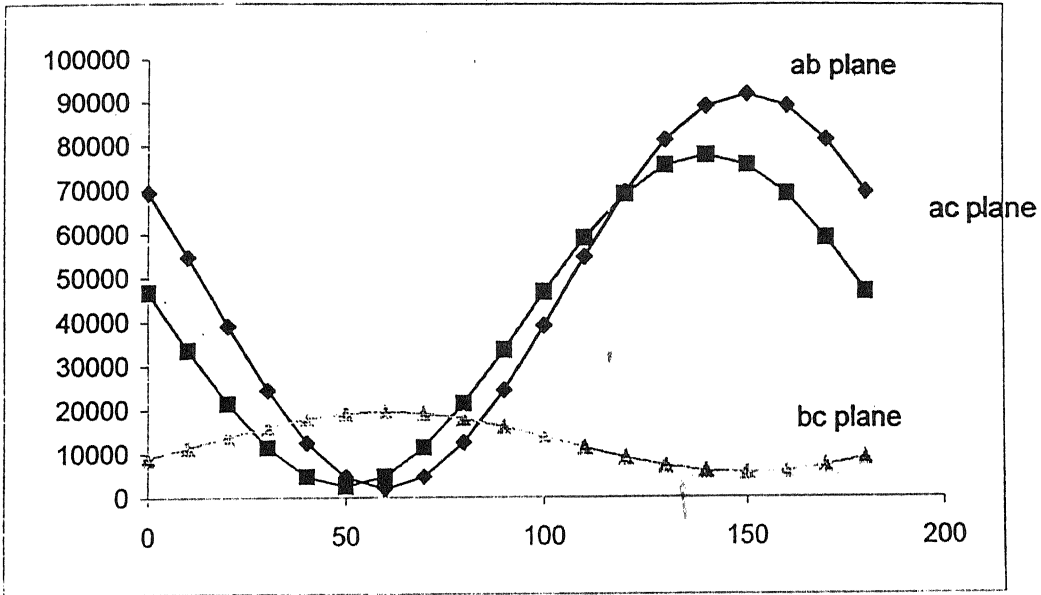
Fig.- 2 (a) Site 1 (g^2 vsθ) Angular Variation of ESR spectra of Cu(II) in zinc glutamate dihydrate crystal for rotation in ab, bc, ca planes

चित्र -2(b) क्षेत्र 1(K^2 vs θ) जिंक ग्लूटामेट डाइहाइड्रेट क्रिस्टल में Cu(II) के ab, bc,तथा ca तलों में घूर्णन के लिये ESR वर्णक्रम का कोणीय परिवर्तन

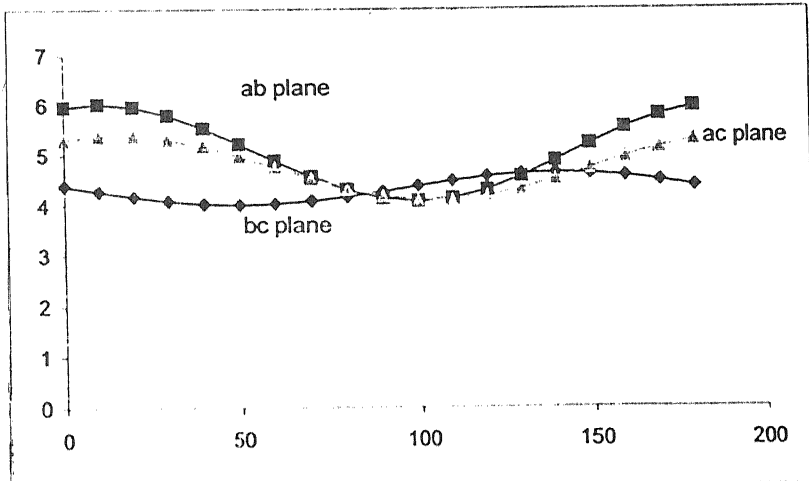
Fig. -2(b) Site 1 (K^2 vs θ)Angular Variation of ESR spectra of Cu(II) in zinc glutamate dihydrate crystal for rotation in ab, bc, ca planes

चित्र - 3(a) क्षेत्र 1(g^2 vs θ) जिंक ग्लूटामेट डाईहाइड्रेट क्रिस्टल में Cu(II) के ab, bc,तथा ca तलों में घूर्णन के लिये ESR वर्णक्रम का कोणीय परिवर्तन

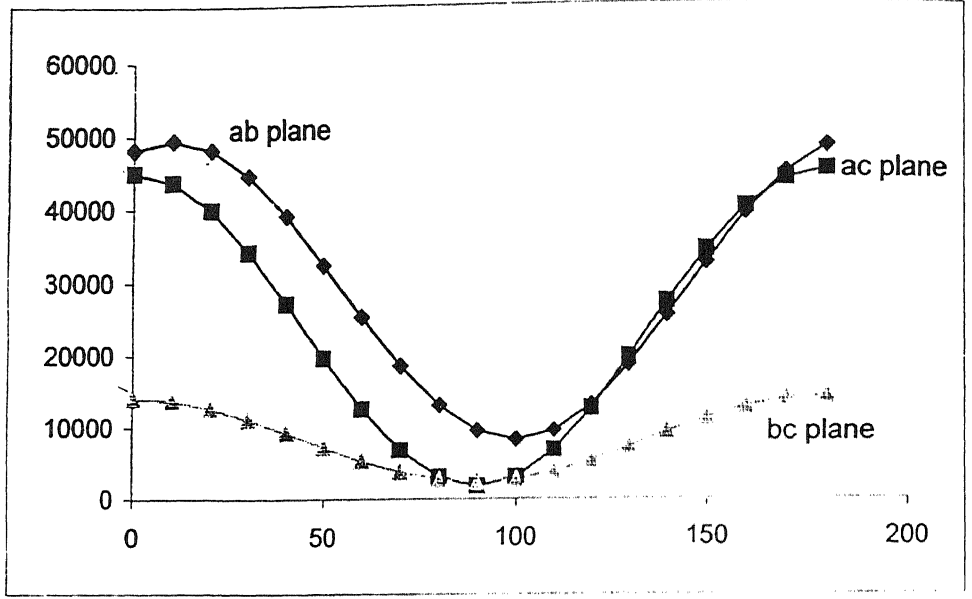
Fig.-3(a) Site 1 (g^2 vs θ) Angular Variation of ESR spectra of Cu(II) in zinc glutamate dihydrate crystal for rotation in ab, bc, ca planes

चित्र 3(b) क्षेत्र 1(K^2 vs θ) जिंक ग्लूटामेट डाईहाइड्रेट क्रिस्टल में Cu (II) के ab, bc,तथा ca तलों में घूर्णन के लिये ESR वर्णक्रम का कोणीय परिर्वतन

Fig.3(b) Site 1 (K^2 vs θ) Angular Variation of ESR spectra of Cu (II) in zinc glutamate dihydrate crystal for rotation in ab, bc, ca planes

प्रयोगात्मक

जिंक ग्लूटामेट डाइहाइड्रेट के सफेद प्रिज्मीय एकल क्रिस्टलों को जिंक आक्साइड एवं ग्लूटामिक अम्ल के मिश्रित विलयन की धीमी गति के वाष्पीकरण द्वारा बनाया जा सकता है जिनमें वृद्धि c अक्ष के अनुदिश की जा सकती है। इनमें मुख्य अक्ष (11,0) एवं (0,11) हैं ।

E.S.R. की माप वैरियान E-4 स्पेक्ट्रोमीटर X बैण्ड माइक्रोवेव (9.5GHz) आवृत्ति पर की गई है, DPPH को गुहिका (Cavity) के अन्दर मार्कर की तरह प्रयोग किया गया है। माइक्रोवेव आवृत्ति की माप हैविलेट पैकर्ड आवृत्ति गणक की सहायता से की गयी है । ऊर्ध्व अक्ष के परितः क्रिस्टलों को घुमाने के लिए गोनियोमीटर का उपयोग किया गया। क्रिस्टल अध्ययन के लिए a, b तथा c अक्षों को चुना गया। वर्णक्रम का अंकन प्रत्येक 10° कोण पर परस्पर अभिलम्बवत् अक्षों के परितः किया गया है । इन मापों को कई क्रिस्टलों के लिए दोहराया गया है।

परिणाम तथा विवेचना

इलेक्ट्रान प्रचक्रण अनुनाद के कोणीय परिर्वतन की माप का अध्ययन क्रिस्टलों को उसके तीनों परस्पर लम्बवत् अक्षों a, b तथा c के पारितः किया गया। चित्र -1 में यह वर्णक्रम cअक्ष के प्रति चुम्बकीय क्षेत्र के दिक्विन्यास (Orientation) के लिए प्रदर्शित है। प्रत्येक तल में सूक्ष्म रेखाओं की अधिकतम संख्या 8 पायी गयी । यद्यपि कुछ विशेष दिशाओं में ये 8 लाइनें एकल

4 लाइनों के समूह के रूप में पायी गयीं। इन दिशाओं में दोनों क्षेत्र एकजैसे देखे गये। ये वर्णक्रम ^{65}Cu तथा ^{63}Cu आइसोटोपिक बिखराव को प्रदर्शित करते हैं । इन वर्णक्रमों को देखने से पता चलता है कि Cu^{+2} जिंक ग्लूटामेट डाइहाइड्रेट में दो समान स्थानों में बैठ गया है। स्पेक्ट्रोस्कोपिक विपाटन कारक (Spectroscopic splitting factor) एवं सूक्ष्म विपाटन (Hyperfine splitting) दोनों दिशाओं में एक समान है। g^2एवं $K^2(g^2A^2)$ का कोणीय परिर्वतन (angular variation) मान ab, bc तथा ca तलों मे चित्र 2(a), 2(b) तथा 3(a), 3(b) में देखा जा सकता है । g तथा A के मान दोनों क्षेत्रों के लिए ca तल के लिए अधिक विषमदैशिक (anisotropic) हैं । ये परिणाम Cu^{2+} के लिए आतिथेय संजाल (host lattice) में विषमलम्बाक्ष (rhombic) स्थानीय वैद्युत क्षेत्र को प्रर्दशित करते हैं । सूक्ष्म पैटर्न के साथ a, b तथा c लाम्बिक अक्षों के आधार तथा शान लैण्ड विधि [14] के प्रयोग से तथा निम्न हैमिल्टोनियन द्वारा स्पिन हैमिल्टोनियन प्राचलों को ज्ञात किया जा सकता है।

$$\mathcal{H} = \beta(g_z H_z S_z + g_x H_x S_x + g_y H_y S_y + A_z I_z S_z + A_x I_x S_x + A_y I_y S_y$$

सभी g तथा A के मान कमरे के साधारण ताप पर ज्ञात किये गये हैं तथा ये मान स्ट्रांशियम टार्टरेट टेट्राहाइड्रेट एवं कैल्सियम टार्टरेट टेट्राहाइड्रेट एकल क्रिस्टलों[15-16] के मान के समान हैं। जैसा कि ऊपर बताया जा चुका है कि ये अतिथि आयन जालक के दो भिन्न क्षेत्रों में पाशित हो जाते हैं। ये अतिथि आयन जालक में जिंक के स्थान पर समाहित हो सकते हैं । इसलिए उपसहसंयोजी ऑक्सीजन के द्वारा अतिथि आयन के परितः स्थानीय क्रिस्टल क्षेत्र को जाना जा सकता है। क्रिस्टलीय संरचना को ध्यानपूर्वक देखने पर यह पता चलता है कि इकाई कोष्ठ विषमलम्बाक्ष है एवं इसमें दो अणु [13] हैं। कुछ इस तरह का सम्बन्ध जिंक तथा कापर के बीच

सारणी - 1

क्षेत्र 1 एवं 2 के लिए मुख्य g तथा A के मान एवं उसकी दिक कोज्या

क्षेत्र	g का मुख्य मान	दिक कोज्याएँ a, b तथा c अक्ष निकाय में			A का मुख्य मान	दिक कोज्याएँ a, b तथा c अक्ष निकाय में		
		a	b	c	(C)	a	b	c
1	2.0717	0.6636	-0.0378	0.7471	13.86	-0.9363	0.33[illegible]5	0.1186
	2.1068	0.4588	-0.8094	0.3666	69.21	0.3423	0.7834	0.5188
	2.4934	0.5908	0.5860	0.5545	133.94	0.0785	0.5264	0.8466
2	2.0018	0.4102	0.2150	0.8886	27.42	0.6449	0.6538	0.3971
	2.0939	-0.6009	0.7948	-0.0854	38.56	0.7616	0.5925	0.2627
	2.3133	0.6860	0.5676	0.4552	103.14	0.637	0.4718	0.8794

सारणी - 2

Zn-O सदिशों की दिक कोज्याएँ एवं दूरियाँ

a, b, c अक्ष निकायों में दिक कोज्याएँ

बन्ध	दूरियाँ	a	b	c
Zn-O(1)	2.106	± 0.1120	+0.7587	+0.6417
Zn-O(2)	3.238	± 0.3918	±0.6926	±0.6188
Zn-O(3)	2.036	± 0.4889	±0.1500	±0.8592
Zn-O(4)	2.576	± 0.7519	±0.0283	±0.6586
Zn-O(5)	2.070	± 0.0464	±0.9848	±0.1672
Zn-O(6)	2.103	± 0.2317	±0.6208	±0.7489

g तथा A मानों के लिए आकलित त्रुटियाँ क्रमशः +0.0002 एवं +2G है। डाइएथिलडाइथायोकार्बमिट यौगिकों में पाया जाता है। यद्यपि 5 अन्य करीब के जिंक के सल्फर लीगैण्ड विरूपित द्विसमलाम्बाक्ष पिरामिड जिसमें एक सल्फर परमाणु लगभग, $0.4A^0$ जिंक परमाणु से अन्य चार की तुलना में अधिक दूरी पर होता है। चुम्बकीय रूप से असमान क्षेत्रों का विभिन्न सदिशों का जालक में एक्स-रे डेटा द्वारा तुलना करने का प्रयास किया गया है जिसे सारणी - 1 तथा सारणी 2 से देखा जा सकता है। Zn-O(1) तथा Zn-O(2) सदिशों के दिक कोज्याएँ प्रायोगिक के क्षेत्र 2 तथा 1 के मान से संगत हैं । यहाँ पर 5 आक्सीजन के परमाणु तथा 1 नाइट्रोजन का परमाणु किसी जिंक आयन के लिए पालीहेड्रा का निर्माण करते हैं । यद्यपि जिंक आयन के परितः विरूपित पालीहेड्रा Zn-O दूरियों तथा उन जालक जिनमें उनके दिकविन्यासों के दो समूह हैं के अनुसार समान हैं। इससे आयन के लिए आदर्श क्षेत्र में तात्कालिक रूप से विषमलम्बाक्ष सममिति पैदा होती है।

निर्देश

1. स्जैनिकी, बी. : Acta Phys. Polonica 1970, A38, 189.
2. सूर्य नारायण, डी. तथा शोभान्द्री, जे. : J. Magn. Res. 1974, 14, 1
3. कार्कमैज, एम. : J. Phys. Chem. Solids 1980, 41, 243.
4. रामाशास्त्री, सी. तथा सुनन्दा, सी. एस. : J. Magn. Res. 1976, 23, 81.
5. नेचीगॉल, पी. नेचिवॉ, डी. तथा सुनन्दा, सी. एस. : J. Phys. Chem. B, 200, 104, 1738.

6. योकोजावा, वाई. तथा काजूमाता, वाई. : J. Phys. Soc. Japan, 1958, 13, 1174.8.

7. मारोगाकी, के. फ्यूजीमोतो, एम. तथा ईटा, जे. : J. Phys. Soc. Japan, 1961, 16, 694

8. वॉकिंस, जी. डी. : Phys. Rev., 1959, 79, 113

9. श्रीवास्तव, के. एन. तथा वेंकटेश्वरलु, पी. : Proc. Indian Acad. Sci. 1966, 63, 284.

10. क्वाबरा, जी. : J. Phys. Rev., 1959, 79. 113.

11. अब्दुलसाबिरोव, आर. यू., ग्रेसनेव, एस. यू. तथा जारीपोव, एम. एम. : Sov. Phys.- Sov. Phys.-Solid St. 1972, 13, 2091

12. अब्दुलसाबिरोव, आर. यू., बोगाटोवा, टी. बी., ग्रेसनव, यू. एस. तथा जारीपोव, एम.एम. : Sov. Phys.- Solid. - St. 1972, 13, 2091.

13. ग्रामाच्योलि, सी. एम. : Acta Cryst. 1966, 21, 600.

14. स्चोनलैण्ड, डी. एस. : Proc. Soc. (London) 1959, 73, 788.

15. मर्फी, जे. सी. तथा बॉन्डी, जे. : J. Chem. Phys. 1967, 46, 1215.

16. मर्फी, जे. सी. तथा बॉन्डी, जे. : J. Chem. Phys. 1970, 52, 3301.

17. बोनामिकोए एम. डेसी, जी. मुग्नोली, ए. वैसियागो, ए. तथा जाम्बोनेली, एल.: Acta. Cryst. 1965, 19, 886

लेखकों से निवेदन

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिए।

लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिए तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे (K_4FeCN_6) अथवा ($\alpha\beta_1\gamma^4$) इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिए कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।

प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिए। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिए। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

फॉवेल, आर॰ आर॰ तथा म्युलर, जे॰, **जाइट फिजिक॰ केमि॰,** 1928,**150**,80

प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) एक सौ रूपये दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।

लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2" इस पते पर आने चाहिए। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक